ÜBER EIN VERFAHREN ZUR LÖSUNG DER LINEAREN APPROXIMATIONSAUFGABE IN EINEM METRISCHEN VEKTORRAUM

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Wolfgang Schwartz
aus Kaltenkirchen

Göttingen 1975

ÜBER EIN VERFAHREN ZUR LÖSUNG DER LINEAREN APPROXIMATIONSAUFGABE IN EINEM METRISCHEN VEKTORRAUM

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Wolfgang Schwartz
aus Kaltenkirchen

Göttingen 1975

D 7

Referent: Prof. Dr. B. Brosowski

Koreferent: Prof. Dr. R. Kreß

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Feb. 1975

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Einleitung und Übersicht

(X,d) sei ein halbmetrischer Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen. D.h., die Verknüpfungen des Vektorraumes X seien in bezug auf die Halbmetrik stetig. V sei eine nichtleere Teilmenge von X und $f \in X \setminus V$. Unter der Approximationsaufgabe A(f,V,d) versteht man:

Bestimme $v_o \in V$, so daß für alle $v \in V$

$$d(f,v_o) \leq d(f,v)$$

ist.

Jedes derartige $v_o \in V$ ist eine Lösung von A(f,V,d) oder auch Minimallösung an f (bzgl. V und d). Der Abstand von f und V ist

$$\varrho(f,V) := \inf \left\{ d(f,v) \mid v \in V \right\}.$$

Für den Spezialfall, daß die Halbmetrik d von einer Norm p herrührt und V ein endlichdimensionaler linearer Teilraum von X ist, gibt es seit langem Verfahren, mit denen man eine Minimallösung an f berechnen kann. Wenn V zusätzlich die Haarsche Bedingung erfüllt, kann man das Remez-Verfahren zur Berechnung einer Lösung von A(f,V,d) anwenden (vgl. LAURENT [3]). Das Remez-Verfahren konstruiert eine Folge von diskreten Approximationsaufgaben $A(f,V,d_k)$, die "leicht" zu lösen sind. (Jede Halbmetrik d_k kommt von einer Halbnorm p_k.)

$\varrho(f,V)$ wird monoton wachsend von unten angenähert. Außerdem hat man bei jedem Iterationsschritt eine obere Schranke für $\varrho(f,V)$. Genauer gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$\varrho_k(f,V) \leq \varrho(f,V) \leq d(f,v_k)$$

und $$\varrho_k(f,V) \leq \varrho_{k+1}(f,V),$$

wobei $v_k \in V$ eine Lösung von $A(f,V,d_k)$ ist. TÖPFER [8] gelang es, das Remez-Verfahren so zu verallgemeinern, daß man auf die Haarsche Bedingung verzichten kann. Das war vor allem deshalb wünschenswert, weil die Haarsche Bedingung eine sehr starke Forderung an V ist (vgl. MAIRHUBER [4] oder S. 59).

CARASSO [2] bewies die Konvergenz des Töpfer-Verfahrens. Darüberhinaus zeigte er, wie man das Töpfer-Verfahren in gewissen Fällen anwenden kann, wenn V konvex ist.

Verzichtet man darauf, daß die Halbmetrik d auf eine Norm zurückgeführt werden kann, so hat man in dieser Allgemeinheit kein Lösungsverfahren für $A(f,V,d)$, auch wenn V ein endlichdimensionaler linearer Teilraum von X ist.

ALBINUS [1] behandelt Metriken, die translationsinvariant sind. Dazu gehört insbesondere

$$d(f,g) = \sup \left\{ 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1 + p_n(f-g)} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\},$$

wobei alle p_n Halbnormen auf X sind, so daß d definit ist. Für diesen Typ beschreibt er ein iteratives Lösungsverfahren, das in jedem Schritt endlich viele der Halbnormen p_n benutzt. Im k-ten Schritt wird d in gewisser Weise durch eine Halbmetrik d_k ersetzt, die auf eine Halbnorm p_k zurückgeführt werden kann. Bei der Berechnung einer Näherungslösung von $A(f,V,d_k)$ stehen deshalb die oben genannten Verfahren zur Verfügung, sobald alle weiteren Voraussetzungen erfüllt sind.

ALBINUS nähert $\varrho(f,V)$ von oben monoton fallend an. d_{k+1} wird nicht durch einen Austauschschritt wie beim Remez- oder Töpfer-Verfahren aus d_k gewonnen. Das Verfahren konvergiert, wenn die Lösung von A(f,V,d) eindeutig bestimmt ist.

In dieser Arbeit wird am Beispiel eines speziellen metrischen Vektorraumes gezeigt, wie man das Remez- oder Töpfer-Verfahren direkt zur Lösung der Aufgabe A(f,V,d) einsetzen kann. Während das Verfahren von Albinus bei jedem Schritt nur eine obere Schranke für die unbekannte Minimalabweichung liefert, hat diese Methode den Vorteil, daß man stets eine Einschließung der Minimalabweichung hat. Dadurch ist man in der Lage, die erreichte Approximationsgüte bei jedem Schritt zu kontrollieren. Die untere Schranke der Einschließung wird Schritt für Schritt monoton wachsend verbessert.

X sei der Vektorraum $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ und w eine Funktion aus $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ mit den Eigenschaften

$$(P) \qquad \bigvee_{x \in \mathbb{R}} \; w(x) > 0$$

$$(\infty) \quad \forall_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+} \; \exists_{M \in \mathbb{R}^+} \; \forall_{x \in [-M,M]} \quad w(x) < \varepsilon .$$

Mit dieser Gewichtsfunktion w sei für $g,h \in X$

$$d(g,h) := \sup \left\{ w(x) \, \frac{|g-h|(x)}{1 + |g-h|(x)} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

d ist eine translationsinvariante Metrik auf X. Mögliche Gewichtsfunktionen sind $2^{-|x|}$, $\exp(-x^2)$ und viele andere.

(P) und (∞) sind in dieser Arbeit wesentliche Eigenschaften von w. Dagegen kann man die Forderung, daß w stetig sein soll, abschwächen.

In den Teilen I. - III. und den Abschnitten 12 und 13 wird nur $w(x) = 2^{-|x|}$ benutzt, obwohl auch alle anderen stetigen Gewichtsfunktionen mit den Eigenschaften (P) und (∞) verwendet werden könnten. Im 14. Abschnitt wird dagegen $w(x) = 2^{-x^2}$ gesetzt, weil dort Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}$ eine Rolle spielt. Das Ergebnis von Abschnitt 14 gilt nicht ohne weiteres für nicht auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Gewichtsfunktionen w.

Der I. Teil dient der Vorbereitung. Weil sich später zeigt, daß es nicht ausreicht, nur die Metrik d zu untersuchen, wird zu beliebiger nichtleerer Teilmenge B von $\mathbb{R}$ die Halbmetrik d^B eingeführt. Für $g,h \in X$ ist

$$d^B(g,h) := \sup\left\{ w(x) \frac{|g-h|(x)}{1 + |g-h|(x)} \;\middle|\; x \in B \right\}.$$

Einige theoretische Aspekte werden berührt: Existenz und Charakterisierung von Minimallösungen und approximative Kompaktheit.

Danach wird der wichtige Begriff Referenz eingeführt. Die charakteristische Relation einer Referenz besteht nicht zwischen den nichtlinearen Funktionalen l_x (Def. siehe Teil I.) ihrer Punkte, sondern zwischen den linearen Auswertungsfunktionalen ihrer Punkte, obwohl d(g,h) das Supremum der Funktionale $|l_x|$ $(x \in \mathbb{R})$ an der Stelle g-h ist.

Auf diese Weise erreicht man, daß die charakteristischen Zahlen λ_i einer Referenz als Lösungen eines linearen Gleichungssystems berechnet werden können, so daß $\sum_0^m \lambda_i f(x_i) \geq 0$ ist. Die Referenzabweichung h ist dagegen die Lösung einer nichtlinearen Gleichung, nämlich

$$\sum_0^m \lambda_i f(x_i) = \sum_0^m |\lambda_i| \frac{2^{|x|}\, h}{1 - 2^{|x|}\, h},$$

mit der Einschränkung, daß h nichtnegativ und h kleiner als $H := \min\left\{ 2^{-|x_i|} \;\middle|\; i \in [0:m] \right\}$ ist. h existiert und ist eindeutig bestimmt, weil die Funktion

$$F(y) := \sum_{0}^{m} |\lambda_i| \frac{2^{|x_i|_y}}{1 - 2^{|x_i|_y}}$$

auf dem Intervall $[0,H)$ streng monoton wächst und unbeschränkt ist, und $F(0) = 0$ ist.

Einige Sätze über Referenzen und Beziehungen zwischen Referenzen und Minimallösungen werden gezeigt. Dabei stellt sich heraus, daß nivellierte Referenzfunktionen stets Minimallösungen an f bzgl. der durch die Punkte der Referenz gegebenen Halbmetrik sind und es zu einer Minimallösung $v_o \in V$ an f stets eine Referenz (M,V) gibt, so daß v_o eine nivellierte Referenzfunktion und $\varrho(f,V)$ die Referenzabweichung von (M,V,f) sind.

Der II. Teil ist dem Töpfer-Verfahren gewidmet. Zunächst wird der Punkteaustausch untersucht. Das Kriterium, nach dem Punkte gegeneinander ausgetauscht werden, ist vom Remez- oder Töpfer-Verfahren in normierten Räumen oder auch von der Simplexmethode bekannt (vgl. LAURENT [3], TÖPFER [8], STIEFEL [7]).

Mit dem Töpfer-Verfahren wird eine Referenzenfolge $(M_k,V)_{k \in \mathbb{N}}$ konstruiert. Im k-ten Schritt wird anhand einer (vorgegebenen) Präzision η_k entschieden, ob ein Punkteaustausch durchgeführt werden soll. η_k beschreibt die Genauigkeit, mit der im k-ten Schritt gerechnet werden soll.

Es wird bewiesen, daß eine Teilfolge der konstruierten Funk-

tionenfolge $(\hat{v}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im Sinne von d^B gegen eine Minimallösung an f konvergiert, wenn $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Aus dem Konvergenzbeweis folgt, daß $(\hat{v}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Teilfolge hat, die nicht wiederum eine gegen eine Minimallösung an f konvergente Teilfolge hat. Weil man außerdem eine Folge von Einschließungen für die Minimalabweichung hat, deren untere Schranken monoton wachsen, ist die Konvergenzaussage numerisch ausreichend.

Im III. Teil wird zuerst dargestellt, welche Konsequenzen die Haarsche Bedingung für die Approximationsaufgabe A(f,V,d) hat. Das Alternantenkriterium und die eindeutige Lösbarkeit von A(f,V,d) erhält man wie in der Approximationstheorie in normierten Räumen. ($d = d^{\mathbb{R}}$)

Wenn man die Haarsche Bedingung voraussetzt, wird aus dem Töpfer-Verfahren das Remez-Verfahren. Die konstruierte Funktionenfolge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert selbst gegen die Lösung von A(f,V,d). Unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen über die Folge $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ folgt leicht, daß die Folge $(d(f,v_k) - h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ linear gegen 0 konvergiert.

Aus der Tschebyscheff-Approximation in $\mathcal{C}[a,b]$ mit der Haarschen Bedingung kennt man neben dem einfachen Punkteaustausch ($\longrightarrow$ 1. Remezverfahren) auch den simultanen Punkteaustausch ($\longrightarrow$ 2. Remezverfahren). Anstatt nur einen Punkt durch einen anderen zu ersetzen, werden bis zu n+1 alte Punkte fallen gelassen und an ihrer Stelle ebensoviele neue eingeführt. ($n = \dim V$)

Dieses Konzept läßt sich auf die Approximationsaufgabe $A(f,V,d)$ in $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ mit Haarscher Bedingung übertragen. Man erhält so auch hier ein zweites Remez-Verfahren (siehe Abschnitte 12 und 13).

Unter der Voraussetzung, daß f und die Funktionen aus V auf $\mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar sind, und einer weiteren technischen Voraussetzung konvergiert das zweite Remez-Verfahren quadratisch, d.h., die Folge $(d(f,v_k) - h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert von zweiter Ordnung gegen 0. Dieser Satz verallgemeinert ein Ergebnis von VEIDINGER [10], das die Tschebyscheff-Approximation in $\mathcal{C}[a,b]$ mit Haarscher Bedingung betrifft. Weil hierbei die Differenzierbarkeitseigenschaften entscheidend sind, wird statt der Gewichtsfunktion $2^{-|x|}$ in der Metrik d die auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion 2^{-x^2} verwendet.

Ich verdanke Herrn Prof. Dr. B. Brosowski die Anregung zu dieser Arbeit sowie zahlreiche Hinweise und nützliche Unterhaltungen. Herrn Prof. Dr. R. Kreß danke ich für die Übernahme des Koreferats.

Inhaltsverzeichnis

I. Vorbereitungen 1

1. Der halbmetrische Vektorraum $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ 1

2. Formulierung des Approximationsproblems und Existenz von Minimallösungen 6

3. Charakterisierung von Minimallösungen 8

4. Approximative Kompaktheit 13

5. Referenzen 14

6. Referenzen und Minimallösungen 22

II. Konstruktion einer Minimallösung an f mit Hilfe des Töpfer-Verfahrens 27

7. Der Punkteaustausch 28

8. Das Töpfer-Verfahren 37

9. Die Konvergenz des Töpfer-Verfahrens 49

III. Haarsche Bedingung und Remez-Verfahren 63

10. Die Haarsche Bedingung 63

11. Das Remez-Verfahren 71

IV. Das zweite Verfahren von Remez 79

12. Der simultane Punkteaustausch 80

13. Das zweite Remez-Verfahren 86

14. Zur Konvergenzgeschwindigkeit des zweiten Remez-Verfahrens 93

Literatur 117

I. Vorbereitungen

In diesem Abschnitt werden einige einfache Ergebnisse und Sätze zusammengestellt, die später gebraucht werden. Soweit es erforderlich ist oder nützlich erscheint, werden die Existenz und die Charakterisierung von Minimallösungen behandelt.

1. Der halbmetrische Vektorraum $\mathcal{C}(\mathbb{R})$

$X := \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ist der Vektorraum der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Für jede Teilmenge B von $\mathbb{R}$, die nicht leer ist, und jedes Paar $(g,h) \in X \times X$ sei

$$d^B(g,h) := \sup \left\{ 2^{-|x|} \frac{|g-h|(x)}{1 + |g-h|(x)} \;\middle|\; x \in B \right\}.$$

d^B ist eine translationsinvariante Halbmetrik auf X und (X,d^B) ist ein halbmetrischer Vektorraum über $\mathbb{R}$. d^B ist ein Funktional $q^B: X \longrightarrow \mathbb{R}$ zugeordnet:

$$q^B(g) := d^B(g,\Theta) \qquad \text{für } g \in X.$$

q^B ist eine Quasihalbnorm. (Vgl. ALBINUS [1]) Ohne Schwierigkeiten beweist man

Satz 1: Die Topologie von (X,d^B) ist die Topologie der kompakten Konvergenz auf $\bar{B}$.

Sind $r \in \mathbb{R}_o^+$, $g \in X$ und $B \subseteq \mathbb{R}$, $B \neq \emptyset$, dann seien

$$K_r^B(g) := \left\{ h \in X \mid d^B(g,h) \leq r \right\},$$

$$I_r := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2^{-|x|} > r \right\}$$

und $$B_r := B \cap I_r.$$

Für $h \in X$ gilt, wenn r positiv ist,

$$d^B(g,h) \leq r \iff \sup \left\{ 2^{-|x|} \cdot \frac{|g-h|(x)}{1 + |g-h|(x)} \;\middle|\; x \in B \right\} \leq r$$

$$\iff \bigvee_{x \in B_r} \; 2^{-|x|} \cdot \frac{|g-h|(x)}{1 + |g-h|(x)} \leq r$$

$$\iff \bigvee_{x \in B_r} \; |g-h|(x) \leq \frac{2^{|x|_r}}{1 - 2^{|x|_r}}$$

$$\iff \sup \left\{ \frac{1 - 2^{|x|_r}}{2^{|x|_r}} \cdot |g-h|(x) \;\middle|\; x \in B_r \right\} \leq 1.$$

Für $g \in X$ sei, wenn r positiv ist,

$$q_r^B(g) := \sup \left\{ \frac{1 - 2^{|x|_r}}{2^{|x|_r}} \, |g|(x) \;\middle|\; x \in B_r \right\}.$$

$q_r^B : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Halbnorm. $K_r^B(\Theta)$ ist die Einheitskugel von q_r^B. Damit erhält man für $B \subseteq \mathbb{R}$, $B \neq \emptyset$ und $r \in \mathbb{R}^+$

Satz 2: Die Nullumgebungen $K_r^B(\Theta)$ sind absolutkonvex.

Insbesondere ist (X,d^B) ein (nicht notwendig separierter) lokalkonvexer Raum.

Gewisse Funktionale von X in $\mathbb{R}$ sind von besonderem Interesse. Jedem $x \in \mathbb{R}$ wird durch folgende Definition ein Funktional $1_x: X \longrightarrow \mathbb{R}$ zugeordnet:

$$1_x(g) := 2^{-|x|} \cdot \frac{g(x)}{1 + |g(x)|} \qquad \text{für } g \in X.$$

1_x ist nichtlinear. Es gilt

Satz 3: Für jedes $x \in \bar{B} \subseteq \mathbb{R}$ ist 1_x in jedem $g \in X$ d^B-stetig.

Beweis: Seien $g,h \in X$ und $x \in \bar{B}$. Dann gilt

$$\left|1_x(g) - 1_x(h)\right| = 2^{-|x|} \cdot \left| \frac{g(x)}{1 + |g(x)|} - \frac{h(x)}{1 + |h(x)|} \right|$$

$$= 2^{-|x|} \cdot \left| \frac{g(x) - h(x) + g(x)\cdot|h(x)| - h(x)\cdot|g(x)|}{1 + |g(x)| + |h(x)| + |g(x)\cdot h(x)|} \right|$$

$$\leq 2^{-|x|} \cdot \left\{ \frac{|g(x) - h(x)|}{1 + |g(x)| + |h(x)|} + \frac{\left|g(x)\cdot|h(x)| - h(x)\cdot|g(x)|\right|}{1 + |g(x)| + |h(x)|} \right.$$

$$\leq 2^{-|x|} \cdot \left\{ \frac{|g(x) - h(x)|}{1 + |g(x) - h(x)|} \right.$$

$$+ \frac{\left|g(x)\cdot\left(|h(x)| - |g(x)|\right) + |g(x)|\cdot\left(g(x) - h(x\right.\right.}{1 + |g(x) - h(x)|}$$

Weiter gilt dann

$$\left|1_x(g) - 1_x(h)\right| \leq 2^{-|x|}\cdot\left\{\frac{|g-h|(x)}{1 + |g-h|(x)} + 2\cdot|g(x)|\cdot\frac{|g-h|(x)}{1 + |g-h|(x)}\right\}$$

$$\leq \left(1 + 2\cdot|g(x)|\right)\cdot d^B(g,h) \ ,$$

da $x \in \overline{B}$ ist. q.e.d.

$\mathcal{F}_B(X)$ sei die Menge der d^B-stetigen, beschränkten Funktionale $1:X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß für alle $g \in X$ $1(-g) = -1(g)$ gilt. D.h., es ist

$$1 \in \mathcal{F}_B(X) \iff \exists_{K \in \mathbb{R}^+} \ \forall_{g \in X} \ |1(g)| \leq K\cdot q^B(g)$$

$$\wedge \ 1 \text{ ist } d^B\text{-stetig} \ \wedge \ \forall_{g \in X} \ 1(-g) = -1(g).$$

Für alle $x \in \overline{B}$ gilt offenbar $1_x \in \mathcal{F}_B(X)$. $\mathcal{F}_B(X)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Für $1 \in \mathcal{F}_B(X)$ sei

$$\|1\|_B := \sup\left\{\frac{|1(g)|}{q^B(g)} \;\middle|\; g \in X \wedge q^B(g) > 0\right\} .$$

Satz 4: $\|.\|_B : \mathcal{F}_B(X) \longrightarrow \mathbb{R}_o^+$ ist eine Norm.

Beweis: Ohne Schwierigkeiten erkennt man, daß $\|.\|_B$ nichtnegativ, positivhomogen und symmetrisch ist und die Dreiecks-

ungleichung erfüllt. D.h., es gilt

(a) $\underset{l \in \mathcal{F}_B(X)}{\forall} \quad \|l\|_B \geq 0$

(b) $\underset{l \in \mathcal{F}_B(X)}{\forall} \quad \underset{\alpha \in \mathbb{R}}{\forall} \quad \|\alpha l\|_B = |\alpha| \cdot \|l\|_B$

(c) $\underset{l_1, l_2 \in \mathcal{F}_B(X)}{\forall} \quad \|l_1 + l_2\|_B \leq \|l_1\|_B + \|l_2\|_B$

Es sei $l \in \mathcal{F}_B(X)$ und $\|l\|_B = 0$. Das bedeutet für $g \in X$ mit $q^B(g) > 0$, daß $l(g) = 0$ ist. Weil l beschränkt ist, gilt auch $l(g) = 0$, wenn $q^B(g) = 0$ ist. q.e.d.

Darüberhinaus gilt

<u>Satz 5:</u> $\left(\mathcal{F}_B(X), \|.\|_B\right)$ ist ein Banach-Raum.

Der Beweis erfolgt in der üblichen Weise und wird deshalb an dieser Stelle weggelassen.

2. Formulierung des Approximationsproblems und Existenz von Minimallösungen

V sei ein n-dimensionaler linearer Teilraum von X und $f \in X$. Für jede nichtleere Teilmenge B von $\mathbb{R}$ sei A(f,V,B) die Approximationsaufgabe

Bestimme $v_o \in V$, so daß für alle $v \in V$

$$d^B(f,v_o) \leq d^B(f,v)$$

gilt.

$\varrho^B(f,V) := \inf \left\{ d^B(f,v) \mid v \in V \right\}$ ist der d^B-Abstand von f zu V. $\varrho^B(f,V)$ heißt die Minimalabweichung von f. Jedes Element $v_o \in V$, das die Gleichung $d^B(f,v_o) = \varrho^B(f,V)$ erfüllt, heißt eine Minimallösung an f (bzgl. V und d^B) oder eine Lösung von A(f,V,B).

Satz 6: Es gibt ein $v_o \in V$ mit $d^B(f,v_o) = \varrho^B(f,V)$.

Beweis: (1) $\varrho^B(f,V) = 0$. Dann liegt f in $\overline{V} = V + K_0^B(\Theta)$. ($\overline{V}$ bzgl. d^B) D.h., es gibt ein $v_o \in V$ mit $f|B = v_o|B$. Also ist v_o eine Lösung von A(f,V,B).

(2) $\varrho^B(f,V) > 0$. A(f,V,B) ist genau dann lösbar, wenn

$$K^B_{\varrho^B(f,V)}(f) \cap V \neq \emptyset$$

ist. Für $v \in V$ gilt

$$v \in K^B_{\varrho^B(f,V)}(f) \iff d^B(f,v) \leq \varrho^B(f,V)$$

$$\iff q^B_{\varrho^B(f,V)}(f-v) \leq 1$$

nach S. 2. $q^B_{\varrho^B(f,V)} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Halbnorm. Deshalb gibt es ein $v_o \in V$ mit

$$q^B_{\varrho^B(f,V)}(f-v_o) = E := \inf \left\{ q^B_{\varrho^B(f,V)}(f-v) \;\middle|\; v \in V \right\}.$$

1. Fall: Es ist $E \leq 1$. Dann folgt sofort $d^B(f,v_o) = \varrho^B(f,V)$.

2. Fall: Es ist $E > 1$. Dann hat man $d^B(f,v_o) > \varrho^B(f,V)$. Aus der Definition von $\varrho^B(f,V)$ ergibt sich, daß es ein $v^* \in V$ gibt, so daß

$$\varrho^B(f,V) \leq d^B(f,v^*) < d^B(f,v_o)$$

ist. Dann gilt jedoch

$$q^B_{\varrho^B(f,V)}(f-v^*) < q^B_{\varrho^B(f,V)}(f-v_o) = E,$$

was nicht möglich ist. Der zweite Fall trifft deshalb nicht zu.

Also gilt die Behauptung. q.e.d.

3. Charakterisierung von Minimallösungen

Nachdem die Frage nach der Existenz von Minimallösungen geklärt ist, stellt sich als nächstes die Frage: Wie kann man die Lösungen von A(f,V,B) charakterisieren?

Das Theorem von SINGER [11] kann verallgemeinert werden. An die Stelle des stetigen Duals $(X,d^B)'$ tritt $\mathcal{F}_B(X)$. Es gilt

Satz 7: $\varrho^B(f,V)$ sei positiv. $v_o \in V$ ist genau dann eine Lösung von A(f,V,B), wenn es ein $l \in \mathcal{F}_B(X)$ mit

(i) $\|l\|_B = 1$,

(ii) $\bigwedge_{g \in X} \left(v \in V \Longrightarrow l(g+v) = l(g) \right)$ und

(iii) $l(f) = d^B(f,v_o)$

gibt.

Beweis: ($\Longleftarrow$) Gibt es dieses l, so gilt für alle $v \in V$

$$d^B(f,v_o) = l(f) = l(f-v) \leq \|l\|_B \, d^B(f,v)$$
$$\leq d^B(f,v) \ .$$

($\Longrightarrow$) v_o sei eine Lösung von A(f,V,B). Nach S. 7 ist v_o auch bzgl. der Halbnorm $q^B_{\varrho^B(f,V)}$ eine Minimallösung an f. Nach SINGER [11] S. 18 gibt es ein $L \in (X, q^B_{\varrho^B(f,V)})'$ mit den Eigenschaften

$$\text{(a)} \quad \sup\left\{ \frac{|L(g)|}{q^B_{\varrho^B(f,V)}(g)} \;\middle|\; g \in X \wedge q^B_{\varrho^B(f,V)}(g) > 0 \right\} = 1$$

$$\text{(b)} \quad L|V = \Theta$$

$$\text{(c)} \quad L(f) = q^B_{\varrho^B(f,V)}(f-v_o) = 1 \,.$$

Für $g \in X$ sei

$$R(g) := \inf\left\{ d^B(g,h) \;\middle|\; L(h) = 0 \wedge h \in X \right\}.$$

R ist auf (X,d^B) stetig. Es sei für $g \in X$

$$l(g) := \operatorname{sign}\circ L(g) \cdot R(g).$$

Damit gilt:

1. Weil $R(g) = R(-g)$ ist, gilt $l(-g) = -l(g)$ für $g \in X$.

2. l ist stetig, weil R es ist und $L(h) = 0 \Longrightarrow R(h) = 0$ gilt.

3. Für $g \in X$ gilt

$$|l(g)| = R(g) \leq d^B(g,\Theta) = q^B(g).$$

Aus 1. - 3. folgt, daß $l \in \mathcal{F}_B(X)$ ist und $\|l\|_B \leq 1$ ist.

4. Ist $L(h) = 0$, dann gilt

$$q^B_{\varrho^B(f,V)}(f-h) \geq L(f-h) = L(f) = 1$$

und daher

$$d^B(f,h) \geq \varrho^B(f,V) = d^B(f,v_o) \ .$$

Also ist $R(f-v_o) = d^B(f,v_o) = q^B(f-v_o)$. D.h., mit 3. gilt $\|l\|_B = 1$.

5. Weil $L|V = \Theta$ ist, gilt für $g \in X$ und $v \in V$

$$l(g+v) = \text{sign} \circ L(g) \cdot R(g+v) = \text{sign} \circ L(g) \cdot R(g) = l(g).$$

6. Mit (c) und 4. erhält man, da $L(v_o) = 0$ ist,

$$l(f-v_o) = R(f-v_o) = d^B(f,v_o).$$

Also hat l die Eigenschaften (i) - (iii). q.e.d.

Aus der Approximationstheorie für normierte Räume ist das Kolmogoroff-Kriterium bekannt. Es kann ebenfalls für die Charakterisierung der Lösungen von A(f,V,B) verallgemeinert werden. Dazu ist es lediglich erforderlich, die Abweichungsfunktionale geeignet zu ersetzen.

Def. 1: Für $g \in X$ seien

$$A_B^+(g) := \left\{ x \in \overline{B} \;\middle|\; l_x(g) = q^B(g) \right\}$$

$$A_B^-(g) := \left\{ x \in \overline{B} \;\middle|\; l_x(g) = -q^B(g) \right\}$$

und $A_B(g) := A_B^+(g) \cup A_B^-(g)$.

$A_B(g)$ ist für alle $g \in X$ nichtleer.

Satz 8: (Kolmogoroff) Sei $v_o \in V$. Für $v \in V$ sei

$$m_B(v) := \min \left\{ 1_x(f-v_o) \cdot 1_x(v-v_o) \mid x \in A_B(f-v_o) \right\} .$$

v_o ist genau dann eine Minimallösung an f, wenn für alle $v \in V$ $m_B(v) \leq 0$ ist.

Beweis: ($\Longrightarrow$) (1) $\varrho^B(f,V) = 0$. Die Behauptung ist evident.

(2) $\varrho^B(f,V) > 0$. v_o sei eine Minimallösung an f. Dann ist v_o auch bzgl. $q^B_{\varrho^B(f,V)}$ eine Minimallösung an f. Nach einem Satz von SINGER [11] gibt es zu jedem $v \in V$ ein $x \in \overline{B}_{\varrho^B(f,V)}$ mit $2^{|x|}\,\varrho^B(f,V) = (1 - 2^{|x|}\,\varrho^B(f,V)) \cdot |f-v_o|(x)$ und

$$(f-v_o)(x)\,\frac{1 - 2^{|x|}\,\varrho^B(f,V)}{2^{|x|}\,\varrho^B(f,V)}\,(v-v_o)(x) \leq 0 .$$

Für $x \in \overline{B}_{\varrho^B(f,V)}$ gilt

$$\frac{1 - 2^{|x|}\,\varrho^B(f,V)}{2^{|x|}\,\varrho^B(f,V)}\,|f-v_o|(x) = 1 = q^B_{\varrho^B(f,V)}{}^{(f-v_o)}$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{sign}(f-v_o)(x) \cdot 1_x(f-v_o) = q^B(f-v_o)$$

$$\Longrightarrow \quad x \in A_B(f-v_o) .$$

Also gibt es zu jedem $v \in V$ ein $x \in A_B(f-v_o)$ mit

$$l_x(f-v_o) \cdot l_x(v-v_o) \leq 0 .$$

D.h., für alle $v \in V$ ist $m_B(v) \leq 0$.

($\Longleftarrow$) (1) $q^B(f-v_o) = 0$. Dann ist v_o eine Minimallösung an f.

(2) $q^B(f-v_o) > 0$. Für alle $v \in V$ sei $m_B(v) \leq 0$. Zu $v \in V$ gibt es dann ein $x \in A_B(f-v_o)$ mit $l_x(f-v_o) \cdot l_x(v-v_o) \leq 0$. Es gilt

$$q^B(f-v_o) = \operatorname{sign} \cdot l_x(f-v_o) \cdot l_x(f-v_o) =: r .$$

Dies ist äquivalent mit

$$\operatorname{sign} \cdot l_x(f-v_o) \frac{1 - 2^{|x|_r}}{2^{|x|_r}} (f-v_o)(x) = 1 =$$

$$= \operatorname{sign} \cdot l_x(f-v_o) \frac{1 - 2^{|x|_r}}{2^{|x|_r}} \left\{ (f-v)(x) + (v-v_o)(x) \right\} .$$

Weil $2^{|x|_r} < 1$ ist, erhält man nun

$$1 \leq \operatorname{sign} \cdot l_x(f-v_o) \frac{1 - 2^{|x|_r}}{2^{|x|_r}} (f-v)(x)$$

und

$$q^B(f-v_o) = r \leq \left| l_x(f-v) \right| \leq q^B(f-v) . \qquad \text{q.e.d.}$$

4. Approximative Kompaktheit

Def. 2: Eine Folge $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in V heißt Minimalfolge für f (genauer: für A(f,V,B)), wenn

$$\lim_m d^B(f,v_m) = \varrho^B(f,V)$$

ist.

Def. 3: V heißt B-approximativ-kompakt, wenn folgendes für jedes $f \in X \setminus V$ gilt:
Ist $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Minimalfolge für A(f,V,B), so hat $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Satz 9: Ist B eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, so ist V B-approximativ-kompakt.

Beweis: Seien $B \subseteq \mathbb{R}$ mit $B \neq \emptyset$ und $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Minimalfolge für A(f,V,B). Weil V n-dimensional ist, gibt es eine endliche, nichtleere Teilmenge M von $B_{\varrho^B(f,V)}$, so daß d^B und d^M auf f-V äquivalente Topologien erzeugen. Es seien

$$K \in \left(\varrho^B(f,V), \min \left\{ 2^{-|x|} \;\middle|\; x \in M \right\} \right)$$

und $I := \left\{ m \in \mathbb{N} \;\middle|\; d^B(f,v_m) \leq K \right\}$. Weil $M = M_K$ ist, erzeugen d^M und q_K^M auf X äquivalente Topologien. Also sind die von d^B und q_K^M auf f-V erzeugten Topologien äquivalent.

Für $m \in I$ gilt

$$q_K^M(f-v_m) \leq 1 \ .$$

$(f-v_m)_{m \in I}$ hat deshalb eine Teilfolge $(f-v_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die q_K^M-konvergent ist. Diese Teilfolge ist auch d^B-konvergent. Damit ist $(v_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge der Minimalfolge $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$. q.e.d.

5. Referenzen

Für $x \in \mathbb{R}$ sei $F_x : X \longrightarrow \mathbb{R}$ das Auswertungsfunktional im Punkte x:

$$F_x(g) := g(x) \qquad \text{für } g \in X.$$

l_x und F_x stehen in enger Beziehung zueinander: Für $g \in X$ gilt

$$l_x(g) = 2^{-|x|} \frac{F_x(g)}{1 + |F_x(g)|}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad F_x(g) = \frac{2^{|x|} l_x(g)}{1 - 2^{|x|} |l_x(g)|} \ .$$

$F_x: X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist ein lineares Funktional. Ist B eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $x \in \overline{B}$, so ist F_x d^B-stetig. F_x ist jedoch nicht in $\mathcal{F}_B(X)$ enthalten.

Nun sei W ein n-dimensionaler linearer Teilraum von X ($n \in \mathbb{N}_o$), $m \in \mathbb{N}_o$ und $M = \left\{ x_i \mid i \in [0:m] \right\}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, so daß für $i \in [1:m]$ $x_{i-1} < x_i$ ist.

Def. 4: (M,W) hat die Eigenschaft (I), wenn es reelle Zahlen $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ gibt, so daß

$$\sum_0^m |\lambda_i| = 1$$

ist und für alle $w \in W$

$$\sum_0^m \lambda_i F_{x_i}(w) = 0$$

gilt.

Def. 5: (M,W) ist eine Referenz der Ordnung m, wenn (M,W) die Eigenschaft (I) hat und für jede echte, nichtleere Teilmenge M' von M gilt, daß (M',W) nicht die Eigenschaft (I) hat.

Wenn (M,W) eine Referenz der Ordnung m ist, ist $m \in [0:n]$. Andernfalls gäbe es eine echte, nichtleere Teilmenge M' von M, so daß (M',W) die Eigenschaft (I) hat.

L sei eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. L enthält genau dann eine Teil-

menge M, so daß (M,W) eine Referenz ist, wenn $\{F_x|W \mid x \in L\}$ linear abhängig ist.

Wenn (M,W) eine Referenz der Ordnung m ist, gibt es reelle Zahlen $\lambda_o,..,\lambda_m$ mit

$$\sum_{o}^{m} |\lambda_i| = 1$$

und

$$\sum_{o}^{m} \lambda_i F_{x_i}(w) = 0$$

für alle $w \in W$. $\lambda_o,...,\lambda_m$ heißen charakteristische Zahlen von (M,W). Sind $\lambda'_o,...,\lambda'_m$ weitere charakteristische Zahlen von (M,W), so gibt es ein $z \in \{-1,1\}$, so daß für $i \in [0:m]$ $\lambda_i = z \cdot \lambda'_i$ ist, weil es keine echte, nichtleere Teilmenge M' von M gibt, so daß (M',W) die Eigenschaft (I) hat. Aus dem gleichen Grunde gilt für $i \in [0:m]$ $|\lambda_i| > 0$.

Def. 6: (M,W) sei eine Referenz der Ordnung m. $\lambda_o,...,\lambda_m$ seien charakteristische Zahlen von (M,W) und r eine Funktion aus X.

$w \in W$ ist eine Referenzfunktion von (M,W,r), wenn es ein $z \in \{-1,1\}$ gibt, so daß für alle $i \in [0:m]$

$$\text{sign} \circ l_{x_i}(r-w) = z \cdot \text{sign}(\lambda_i)$$

gilt.

Man überzeugt sich leicht davon, daß die Definition nicht von der Wahl der charakteristischen Zahlen abhängt.

Def. 7: (M,W) sei eine Referenz der Ordnung m. $\lambda_0,\ldots,\lambda_m$ seien charakteristische Zahlen von (M,W) und r eine Funktion aus X.

$w \in W$ ist eine nivellierte Referenzfunktion und $|h|$, $h \in \mathbb{R}$, eine Referenzabweichung von (M,W,r), wenn für alle $i \in [0:m]$

$$l_{x_i}(r-w) = h \cdot \operatorname{sign}(\lambda_i)$$

gilt.

Auch diese Definition hängt nicht von der Wahl der charakteristischen Zahlen ab.

Satz 10: (M,W) sei eine Referenz der Ordnung m und r eine Funktion aus X. Sind $|h_1|$ und $|h_2|$ Referenzabweichungen von (M,W,r), so ist $|h_1| = |h_2|$.

Beweis: $\lambda_0,\ldots,\lambda_m$ seien charakteristische Zahlen von (M,W). $w \in W$ sei eine nivellierte Referenzfunktion und $|h|$, $h \in \mathbb{R}$, eine Referenzabweichung von (M,W,r), so daß für $i \in [0:m]$ gilt

$$l_{x_i}(r-w) = h \cdot \operatorname{sign}(\lambda_i) .$$

Daraus folgt für $i \in [0:m]$

$$F_{x_i}(r-w) = \frac{2^{|x_i|_h \cdot \operatorname{sign}(\lambda_i)}}{1 - 2^{|x_i|_{|h|}}} .$$

Da (M,W) eine Referenz ist, folgt weiter

$$\sum_0^m \lambda_i F_{x_i}(r) = \sum_0^m |\lambda_i| \frac{2^{|x_i|_h}}{1 - 2^{|x_i|_{|h|}}} .$$

Offenbar gilt $h < 0$ genau dann, wenn $\sum_0^m \lambda_i F_{x_i}(r) < 0$ ist.

Deshalb ist

$$\sum_0^m \lambda_i \operatorname{sign}(h) \cdot F_{x_i}(r) \geqslant 0 .$$

Ferner kann $|h|$ nur im Intervall $\left[0, \min\left\{2^{-|x_i|} \mid i \in [0:m]\right\}\right)$ $=: J$ zu finden sein. Auf J ist die Funktion H mit

$$H(t) := \sum_0^m |\lambda_i| \frac{2^{|x_i|_t}}{1 - 2^{|x_i|_t}}$$

für $t \in J$ streng monoton wachsend. Es ist $H(0) = 0$. H ist auf J nicht nach oben beschränkt. Also gibt es ein eindeutig bestimmtes $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \in J$, so daß

$$(*) \qquad \sum_0^m \lambda_i F_{x_i}(r) = \sum_0^m |\lambda_i| \frac{2^{|x_i|_h}}{1 - 2^{|x_i|_{|h|}}}$$

ist. Dieses h hängt nicht von einer nivellierten Referenzfunktion ab. Also gibt es höchstens eine Referenzabweichung $|h|$ von (M,W,r). q.e.d.

Ist (M,W) eine Referenz mit charakteristischen Zahlen $\lambda_0,\ldots,\lambda_m$, so sind diese nicht eindeutig bestimmt. Ist zusätzlich eine Funktion $r \in X$ gegeben und ist $\sum_0^m \lambda_i F_{x_i}(r) \neq 0$, so kann man die charakteristischen Zahlen von (M,W) dadurch eindeutig festlegen, daß man verlangt, daß für die Lösung h der zu (M,W,r) gehörenden Gleichung $(*)$ auf S. 18 $h = |h|$ gilt.

Vereinbarung: Im folgenden gelte für alle Tripel (M,W,r), daß die Lösung h der zugehörigen Gleichung $(*)$ von S. 18 nichtnegativ ist.

Satz 11: (M,W) sei eine Referenz der Ordnung m und r eine Funktion aus X. (M,W,r) hat eine nivellierte Referenzfunktion und eine Referenzabweichung.

Beweis: $\{ w_i \mid i \in [1:n] \}$ sei eine zur Funktionalmenge $\{ F_{x_i} \mid i \in [1:m] \}$ duale Basis von W. D.h., es gelte

$$F_{x_i}(w_j) = \delta_{ij} \qquad \text{für} \quad (i,j) \in [1:m] \times [1:n] \ .$$

$h \in \mathbb{R}_0^+$ sei die Lösung der zu (M,W,r) gehörenden Gleichung $(*)$ auf S. 18. $w \in W$ sei die folgende Funktion:

$$w := \sum_{1}^{m} \left(r(x_i) - \frac{2^{|x_i|_h \cdot \mathrm{sign}(\lambda_i)}}{1 - 2^{|x_i|_h}} \right) w_i \ .$$

Dann gilt für $j \in [1:m]$

$$F_{x_j}(r-w) = r(x_j) - \sum_{1}^{m} \left(r(x_i) - \frac{2^{|x_i|_h \cdot \mathrm{sign}(\lambda_i)}}{1 - 2^{|x_i|_h}} \right) w_i(x_j)$$

$$= \frac{2^{|x_j|_h \cdot \mathrm{sign}(\lambda_j)}}{1 - 2^{|x_j|_h}}$$

und

$$F_{x_o}(r-w) = r(x_o) - \sum_{1}^{m} \left(r(x_i) - \frac{2^{|x_i|_h \cdot \mathrm{sign}(\lambda_i)}}{1 - 2^{|x_i|_h}} \right) w_i(x_o)$$

$$= r(x_o) + \sum_{1}^{m} \left(r(x_i) - \frac{2^{|x_i|_h \cdot \mathrm{sign}(\lambda_i)}}{1 - 2^{|x_i|_h}} \right) \sum_{1}^{m} \frac{\lambda_j}{\lambda_o} w_i(x_j)$$

$$= r(x_o) + \sum_{1}^{m} \frac{\lambda_j}{\lambda_o} \left(r(x_j) - \frac{2^{|x_j|_h \cdot \mathrm{sign}(\lambda_j)}}{1 - 2^{|x_j|_h}} \right)$$

$$= \frac{1}{\lambda_o} \sum_{0}^{m} \lambda_i F_{x_i}(r) - \frac{1}{\lambda_o} \sum_{1}^{m} |\lambda_i| \ \frac{2^{|x_i|_h}}{1 - 2^{|x_i|_h}}$$

Aus der Beziehung zwischen den Funktionalen F_{x_i} und der Refe-

renzabweichung h auf S. 18 folgt

$$F_{x_o}(r-w) = \frac{1}{\lambda_o} \cdot \left[\sum_{0}^{m} |\lambda_i| \frac{2^{|x_i|_h}}{1 - 2^{|x_i|_h}} - \sum_{1}^{m} |\lambda_i| \frac{2^{|x_i|_h}}{1 - 2^{|x_i|_h}} \right]$$

$$= \frac{2^{|x_o|_h \cdot \mathrm{sign}(\lambda_o)}}{1 - 2^{|x_o|_h}} .$$

Diese Gleichungen sind mit $1_{x_i}(r-w) = h \cdot \mathrm{sign}(\lambda_i)$ für $i \in [0:m]$ äquivalent. q.e.d.

Def. 8: (M,W) sei eine Referenz der Ordnung m. W_{n-m} sei der zur Referenz orthogonale Teilraum von W:

$$W_{n-m} := \left\{ w \in W \;\middle|\; \bigvee_{i=0}^{m} F_{x_i}(w) = 0 \right\} .$$

Offenbar hat W_{n-m} die Dimension n-m.

Satz 12: (M,W) sei eine Referenz der Ordnung m und r eine Funktion aus X. Ist $w_o \in W$ eine nivellierte Referenzfunktion von (M,W,r), so ist $w_o + W_{n-m}$ die Menge aller nivellierten Referenzfunktionen von (M,W,r).

Beweis: (a) Ist w eine nivellierte Referenzfunktion von (M,W,r), so gilt $w_o(x_i) = w(x_i)$ für $i \in [0:m]$. Daher ist $w-w_o \in W_{n-m}$ und $w = w_o + (w-w_o)$.

(b) Ist $w \in W_{n-m}$, so gilt $w_o(x_i) = (w_o+w)(x_i)$ für $i \in [0:m]$. Also ist w_o+w eine nivellierte Referenzfunktion von (M,W,r).

q.e.d.

6. Referenzen und Minimallösungen

Es seien V ein n-dimensionaler linearer Teilraum von X und $f \in X \setminus V$. (M,V) sei eine Referenz der Ordnung m. $h \in \mathbb{R}_0^+$ sei die Referenzabweichung und $v_o \in V$ eine nivellierte Referenzfunktion von (M,V,f).

Satz 13: v_o ist eine Lösung der Approximationsaufgabe $A(f,V,M)$ und h ist die Minimalabweichung $\varrho^M(f,V)$ von f.

Beweis: $\lambda_o,\ldots,\lambda_m$ seien charakteristische Zahlen der Referenz (M,V). Wenn es ein $w \in V$ gibt, so daß

$$\min\left\{\operatorname{sign}(\lambda_i)\cdot 1_{x_i}(w-v_o) \;\middle|\; i \in [0:m]\right\} > 0$$

ist, ist auch

$$\min\left\{\operatorname{sign}(\lambda_i)\cdot F_{x_i}(w-v_o) \;\middle|\; i \in [0:m]\right\} > 0 .$$

Dann folgt

$$\sum_{o}^{m} \lambda_i F_{x_i}(f) = \sum_{0}^{m} |\lambda_i| \operatorname{sign}(\lambda_i) \cdot F_{x_i}(f-v_o)$$

$$> \sum_{0}^{m} |\lambda_i| \operatorname{sign}(\lambda_i) \cdot F_{x_i}(f-w)$$

$$= \sum_{o}^{m} \lambda_i F_{x_i}(f) \ .$$

Da dies nicht möglich ist, gilt für alle $v \in V$

$$\min \left\{ \operatorname{sign}(\lambda_i) \cdot l_{x_i}(v-v_o) \;\middle|\; i \in [0:m] \right\} \leq 0 \ .$$

Da $A_M(f-v_o) = M$ ist, folgt $m_M(v) \leq 0$ für alle $v \in V$. (Siehe dazu Satz 8 auf S. 11.) Nach Kolmogoroff ist v_o eine Lösung von A(f,V,M). Weiter gilt

$$\varrho^M(f,V) = d^M(f,v_o)$$

$$= \max \left\{ |l_x(f-v_o)| \;\middle|\; x \in M \right\}$$

$$= h \ . \qquad \text{q.e.d.}$$

Umgekehrt gilt, daß mit jeder Lösung $v \in V$ von A(f,V,B), wobei $B \subseteq \mathbb{R}$ und $B \neq \emptyset$ ist, auch eine Referenz verbunden ist. Diese Referenz muß nicht eindeutig bestimmt sein.

Satz 14: Ist v_o eine Lösung der Approximationsaufgabe $A(f,V,B)$ und gibt es eine Referenz (M,V) mit $M \subseteq \overline{B}$, dann gibt es eine Referenz (E,V) mit $E \subseteq \overline{B}$, so daß v_o eine nivellierte Referenzfunktion und $\varrho^B(f,V)$ die Referenzabweichung von (E,V,f) ist.

Beweis: Wenn es eine Referenz (E,V) der Ordnung m mit den geforderten Eigenschaften gibt, müssen charakteristische Zahlen $\lambda_o,\ldots,\lambda_m$ von (E,V) den Gleichungen

$$\operatorname{sign}(\lambda_i) = \operatorname{sign} \cdot F_{x_i}(f-v_o)$$

für $i \in [0:m]$ genügen. D.h., das Funktional

$$l := \sum_0^m \lambda_i F_{x_i}$$

ist notwendig eine konvexe Kombination der Funktionale $\operatorname{sign}(f(x_i) - v_o(x_i)) \cdot F_{x_i}$ mit $i \in [0:m]$.

Offenbar muß E eine Teilmenge von $A_B(f-v_o)$ sein. Es sei nun

$$P := \left\{ \operatorname{sign}(f(x) - v_o(x)) \cdot F_x | V \;\middle|\; x \in A_B(f-v_o) \right\} .$$

Da $A_B(f-v_o)$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist und die Abbildung $x \mapsto \operatorname{sign}(f(x) - v_o(x)) \cdot F_x|V$ für $x \in A_B(f-v_o)$ stetig ist, ist P eine kompakte (etwa $\sigma(V^*,V)$-kompakte) Teilmenge von V^*. con P bezeichne die konvexe Hülle von P. Weil V

n-dimensional ist, ist con P ebenfalls kompakt.

Annahme: $\Theta_{V^*} \notin \text{con } P$.

Nach dem bekannten Trennungssatz von Hahn-Banach gibt es dann ein $w \in V$, so daß

$$\bigvee_{l \in \text{con } P} \quad l(w) > 0$$

gilt. Sei $v := w+v_o$. Dann gilt für alle $x \in A_B(f-v_o)$

$$\text{sign}(f(x) - v_o(x)) \cdot F_x(v-v_o) > 0$$

und weiter $m_B(v) > 0$, weil $A_B(f-v_o)$ kompakt ist und für x $\text{sign} \circ l_x(v-v_o) = \text{sign} \circ F_x(v-v_o)$ ist. Weil das Kolmogoroff-Kriterium notwendig ist, damit v_o eine Lösung von A(f,V,B) ist, ist $m_B(v) > 0$ nicht möglich.

Also ist $\Theta_{V^*} \in \text{con } P$. D.h., es gibt m+1 Punkte x_i in $A_B(f-v_o)$ $(m \in [0:n])$ mit $x_{i-1} < x_i$ für $i \in [1:m]$ und reelle Zahlen $\mu_0, \ldots, \mu_m \in (0,1]$ mit $\sum \mu_i = 1$, so daß

$$\Theta_{V^*} = \sum_0^m \mu_i \text{sign}(f(x_i) - v_o(x_i)) \cdot F_{x_i} | V$$

ist und Θ_{V^*} nicht als konvexe Kombination einer echten Teilmenge von $\left\{ \text{sign}(f(x_i) - v_o(x_i)) \cdot F_{x_i} | V \;\middle|\; i \in [0:m] \right\}$ dargestellt werden kann.

Es sei $E := \{ x_i \mid i \in [0:m] \}$. Wenn $\varrho^B(f,V)$ positiv ist, dann sei

$$\lambda_i := \mu_i \cdot \operatorname{sign}(f(x_i) - v_o(x_i))$$

für $i \in [0:m]$. Falls $\varrho^B(f,V) = 0$ ist, sei $\lambda_i := \mu_i$ für $i \in [0:m]$.

(E,V) ist eine Referenz der Ordnung m mit den charakteristischen Zahlen $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$. Für $i \in [0:m]$ gilt

$$l_{x_i}(f-v_o) = \operatorname{sign}(f(x_i) - v_o(x_i)) \cdot \varrho^B(f,V)$$

$$= \varrho^B(f,V) \cdot \operatorname{sign}(\lambda_i) .$$

Also ist v_o eine nivellierte Referenzfunktion und $\varrho^B(f,V)$ die Referenzabweichung von (E,V,f). q.e.d.

II. Konstruktion einer Minimallösung an f mit Hilfe des Töpfer-Verfahrens

In diesem Abschnitt wird eine Methode zur Lösung der Approximationsaufgabe A(f,V,B) untersucht. Der Grundgedanke, auf dem das Verfahren beruht, geht auf REMEZ [6] und TÖPFER [8] zurück.

Es wird eine Folge von Referenzen (M_k,V) konstruiert. (M_{k+1},V) geht aus (M_k,V) durch einen Punkteaustausch hervor. Ist $v_k \in V$ eine nivellierte Referenzfunktion von (M_k,V,f), so hat man mit der Referenzabweichung $h_k \in \mathbb{R}_o^+$ von (M_k,V,f) die Einschließung

$$h_k \leq \varrho^B(f,V) \leq q^B(f-v_k) \ .$$

Ist $h_k < \varrho^B(f,V)$, so wird der Punkteaustausch so vorgenommen, daß die Referenzabweichung $h_{k+1} \in \mathbb{R}_o^+$ von (M_{k+1},V,f) größer als h_k ist. Die Abschätzung von $\varrho^B(f,V)$ nach unten wird bei jedem Austausch schärfer.

Im Falle der linearen Approximation in normierten Räumen hat CARASSO [2] zuerst die Konvergenz des Töpfer-Verfahrens bewiesen.

7. Der Punkteaustausch

B sei eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und (M,V) eine Referenz der Ordnung m, so daß $M \subseteq B$ ist. $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ seien charakteristische Zahlen von (M,V). $h \in \mathbb{R}_0^+$ sei die Referenzabweichung und $v \in V$ eine nivellierte Referenzfunktion von (M,V,f). D.h., h und v genügen dem Gleichungssystem

$$0 \leq \sum_0^m \lambda_i f(x_i) = \sum_0^m |\lambda_i| \frac{2^{|x_i|} h}{1 - 2^{|x_i|} h},$$

$$1_{x_i}(f-v) = h \cdot \operatorname{sign}(\lambda_i) \qquad \text{für } i \in [0:m] .$$

Nach Satz 13 ist v eine Lösung der Aufgabe A(f,V,M). Daraus folgt die Einschließung

$$h \leq \varrho^B(f,V) \leq q^B(f-v)$$

unmittelbar. Wenn $h = q^B(f-v)$ ist, ist v eine Minimallösung an f. h sei nun kleiner als $q^B(f-v)$.

$w \in V_{n-m}$ sei eine Lösung der Approximationsaufgabe $A(f-v,V_{n-m},B)$. Nach Satz 14 gibt es eine Referenz (E,V_{n-m}) der Ordnung 1, so daß $\varrho^B(f-v,V_{n-m})$ die Referenzabweichung und w eine nivellierte Referenzfunktion von $(E,V_{n-m},f-v)$ ist.

Abweichend von der bisherigen Notation seien $E = \{ x_{m+i+1} \mid i \in [0:1] \}$ mit $x_{m+i} < x_{m+i+1}$ für $i \in [1:1]$ und $\lambda_{m+1}, \ldots$

.., λ_{m+l+1} charakteristische Zahlen von (E,V_{n-m}). Diese seien so bestimmt, daß w und $r := \varrho^B(f\text{-}v,V_{n-m})$ das Gleichungssystem

$$0 \leq \sum_{1}^{l+1} \lambda_{m+i}(f\text{-}v)(x_{m+i}) = \sum_{1}^{l+1} |\lambda_{m+i}| \frac{2^{|x_{m+i}|_r}}{1 - 2^{|x_{m+i}|_r}},$$

$$1_{x_{m+i}}(f\text{-}v\text{-}w) = r \cdot \operatorname{sign}(\lambda_{m+i}) \qquad \text{für } i \in [1:l+1]$$

lösen. Da V_{n-m} ein Teilraum von V ist, gilt die Abschätzung

$$h \leq \varrho^B(f,V) \leq \varrho^B(f\text{-}v,V_{n-m}) .$$

Falls $h = \varrho^B(f\text{-}v,V_{n-m})$ ist, ist auch $h = \varrho^B(f,V)$ und v+w ist eine Lösung von A(f,V,B). D.h., die nivellierte Referenzfunktion v von (M,V,f) ist ungünstig ausgewählt.

Satz 15: (Austauschsatz) Es sei $h < \varrho^B(f\text{-}v,V_{n-m})$. Aus E und höchstens m Punkten von M kann eine Referenz $(\tilde{M},V)$ aufgebaut werden, so daß, wenn h positiv ist, v+w eine Referenzfunktion von $(\tilde{M},V,f)$ ist.

Beweis: Für $g \in X$ sei

$$F(g) := \sum_{1}^{l+1} \lambda_{m+i} g(x_{m+i}) .$$

Dann gilt für alle $u \in V_{n-m}$ $F(u) = 0$. Deshalb gibt es reelle Zahlen $\mu_0, \ldots, \mu_m$ mit $\mu_0 = 0$, so daß für alle $u \in V$

$$F(u) = \sum_{1}^{m} \mu_i u(x_i)$$

ist. Es sei $k \in [0:m]$ mit der Eigenschaft

$$\frac{\mu_k}{\lambda_k} = \min \left\{ \frac{\mu_i}{\lambda_i} \;\middle|\; i \in [0:m] \right\} .$$

k braucht nicht eindeutig bestimmt zu sein. Es sei

$$I := \left\{ j \in [0:m] \;\middle|\; \mu_j \lambda_k > \mu_k \lambda_j \right\} .$$

Die Punkte $x_i \in M$ mit $i \notin I$ werden gegen die Punkte $x \in E$ ausgetauscht. Es sei

$$\tilde{M} := \left\{ x_i \;\middle|\; i \in I \right\} \cup E .$$

(Dieses Austauschkriterium wird beim Töpfer- und Remez-Verfahren sowie auch bei der Simplexmethode benutzt. Beim Simplex-Verfahren erreicht man so die Zulässigkeit der neuen Ecke.)

Es sei

$$\Lambda^{-1} := 1 + \sum_{i \in I} \left| \lambda_i \left[\frac{\mu_i}{\lambda_i} - \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right] \right| .$$

$(\tilde{M},V)$ hat die Eigenschaft (I), weil für alle $u \in V$

$$\sum_{i \in I} \wedge\cdot\lambda_i \left[\frac{\mu_i}{\lambda_i} - \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right] u(x_i) \; - \sum_{1}^{l+1} \wedge\cdot\lambda_{m+i} u(x_{m+i})$$

$$= \wedge\cdot \left[\sum_{i \in I} \mu_i u(x_i) - F(u) - \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\lambda_k} \mu_k u(x_i) \right]$$

$$= \wedge\cdot \left[\sum_{i \in I} \mu_i u(x_i) - F(u) + \frac{\mu_k}{\mu_k} \sum_{\substack{0 \\ i \notin I}}^{m} \lambda_i u(x_i) \right]$$

$$= \wedge\cdot \left[\sum_{i \in I} \mu_i u(x_i) - F(u) + \sum_{\substack{0 \\ i \notin I}}^{m} \mu_i u(x_i) \right] \; = 0$$

gilt. Dabei wurde zuletzt benutzt, daß $\mu_i \lambda_k = \mu_k \lambda_i$ für $i \in [0:m] \setminus I$ gilt. $\wedge$ sorgt lediglich für die Normierung der Koeffizienten.

Annahme: Es gibt eine nichtleere, echte Teilmenge Q von $\tilde{M}$, so daß (Q,V) die Eigenschaft (I) hat.

Es seien $Q_1 := Q \cap \left\{ x_i \in M \mid i \in I \right\}$ sowie $Q_2 := Q \cap E$.

Beh.: (Q_1,Q_2) ist eine Partition von Q.

Beweis: Daß $Q = Q_1 \cup Q_2$ ist, ist klar.

Es bleibt zu zeigen, daß $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ ist. Weil $Q_1 \subseteq M$ und $Q_2 \subseteq E$ gilt, ist dies sicher dann der Fall, wenn $M \cap E = \emptyset$ ist.

v+w ist eine nivellierte Referenzfunktion von (M,V,f). Daher gilt für $i \in [0:m]$ und $j \in [1:l+1]$

$$|f-v-w|(x_i) = h < \varrho^B(f-v,V_{n-m})$$

$$= |f-v-w|(x_{m+j}) .$$

Also ist $E \cap M = \emptyset$.

Da Q eine echte Teilmenge von $\tilde{M}$ ist, ist Q_1 eine echte Teilmenge von $\{x_i \in M \mid i \in I\}$ oder Q_2 eine echte Teilmenge von E.

(i) $Q_2 \subseteq E \wedge Q_2 \neq E \wedge Q_2 \neq \emptyset$. Für alle $x \in M$ und alle $u \in V_{n-m}$ gilt $u(x) = 0$. Da (Q,V) die Eigenschaft (I) hat, muß (Q_2,V_{n-m}) auch die Eigenschaft (I) haben. Dies ist jedoch nicht möglich, weil (E,V_{n-m}) eine Referenz ist.

(ii) $Q_2 = \emptyset$. Dann ist $Q_1 = Q \neq \emptyset$. Also hat (Q_1,V) die Eigenschaft (I). Weil I eine echte Teilmenge von $[0:m]$ ist, ist Q_1 eine echte Teilmenge von M. Weil (M,V) eine Referenz ist, kann (Q_1,V) nicht die Eigenschaft (I) haben.

(iii) $Q_1 \neq \{x_i \in M \mid i \in I\} \wedge Q_2 = E$. Es gibt ein $i_o \in I$ mit $x_{i_o} \notin Q_1$. Es sei $I' := I \setminus \{i_o\}$. Wie oben gezeigt wurde, gilt für $u \in V$

$$(A) \qquad \sum_{i \in I} \lambda_i \left[\frac{\mu_i}{\lambda_i} - \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right] u(x_i) - \sum_{1}^{l+1} \lambda_{m+i} u(x_{m+i}) = 0 .$$

Da (Q,V) die Eigenschaft (I) hat, gibt es reelle Zahlen ν_i, $i \in I$ und $\nu_{m+1}, \ldots, \nu_{m+l+1}$ mit $\nu_{i_o} = 0$ und

$$\sum_{i \in I} |\nu_i| + \sum_{1}^{l+1} |\nu_i| = 1 ,$$

so daß für alle $u \in V$

$$\text{(B)} \qquad \sum_{i \in I} \nu_i u(x_i) + \sum_{1}^{l+1} \nu_{m+i} u(x_{m+i}) = 0$$

gilt. Weil (E,V_{n-m}) eine Referenz ist, gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so daß für $i \in [1:l+1]$ $\nu_{m+i} = \alpha \cdot \lambda_{m+i}$ gilt. Also folgt aus den Gleichungen (A) und (B) für alle $u \in V$

$$\sum_{i \in I'} \left[\nu_i + \alpha \cdot \lambda_i \left[\frac{\mu_i}{\lambda_i} - \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right] \right] \cdot u(x_i)$$

$$+ \alpha \cdot \lambda_{i_o} \left[\frac{\mu_{i_o}}{\lambda_{i_o}} - \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right] \cdot u(x_{i_o}) = 0 .$$

Weil (M,V) eine Referenz ist, muß für $i \in I$

$$\nu_i = - \alpha \cdot \lambda_i \cdot \left[\frac{\mu_i}{\lambda_i} - \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right]$$

gelten. Weil $\nu_{i_o} = 0$ ist und λ_{i_o} und α von 0 verschieden sind, folgt $\mu_{i_o} \lambda_k = \mu_k \lambda_{i_o}$. Da $i_o \in I$ ist, kann dies jedoch nicht gelten.

Aus (i) - (iii) folgt, daß es keine echte, nichtleere Teilmenge Q von $\tilde{M}$ mit der Eigenschaft (I) gibt. Also ist $(\tilde{M},V)$ eine Referenz. $(\tilde{M},V)$ hat die charakteristischen Zahlen

$$\tilde{\lambda}_i := \wedge\lambda_i \cdot \left[\frac{\mu_i}{\lambda_i} - \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right] \qquad \text{für } i \in I$$

und $\tilde{\lambda}_{m+i} := \wedge\lambda_{m+i}$ für $i \in [1:l+1]$.

$\tilde{M}$ enthält E und höchstens m Punkte aus M.

Weil $\wedge$ positiv ist und für $i \in I$ $\mu_i \lambda_k - \mu_k \lambda_i > 0$ ist, gilt für $i \in I$

$$\operatorname{sign}(\tilde{\lambda}_i) = \operatorname{sign}(\lambda_i)$$

und für $i \in [1:l+1]$

$$\operatorname{sign}(\tilde{\lambda}_{m+i}) = \operatorname{sign}(\lambda_{m+i}) \ .$$

Wenn h positiv ist, folgt für $i \in I$

$$\operatorname{sign} \cdot l_{x_i}(f-v-w) = \operatorname{sign}(h) \cdot \operatorname{sign}(\lambda_i)$$

$$= \operatorname{sign}(\tilde{\lambda}_i) \ .$$

Weil $\varphi^B(f-v,V_{n-m})$ jedenfalls positiv ist, folgt analog für $i \in [1:l+1]$

$$\operatorname{sign}\circ l_{x_{m+i}}(f-v-w) = \operatorname{sign}(\tilde{\lambda}_{m+i}) .$$

D.h., v+w ist eine Referenzfunktion von $(\tilde{M},V,f)$. q.e.d.

Die Referenzabweichung $\tilde{h}$ von $(\tilde{M},V,f)$ ist die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$$\sum_{i \in I} \tilde{\lambda}_i f(x_i) + \sum_{1}^{\ell+1} \tilde{\lambda}_{m+i} f(x_{m+i})$$

$$= \sum_{i \in I} |\tilde{\lambda}_i| \frac{2^{|x_i|_h}}{1 - 2^{|x_i|_h}} + \sum_{1}^{\ell+1} |\tilde{\lambda}_{m+i}| \frac{2^{|x_{m+i}|_h}}{1 - 2^{|x_{m+i}|_h}} .$$

Satz 16: $\tilde{h}$ ist größer als h, wenn $h < \varrho^B(f-v,V_{n-m})$ ist.

Beweis: Mit $r = \varrho^B(f-v,V_{n-m})$ gilt

$$\sum_{i \in I} |\tilde{\lambda}_i| \frac{2^{|x_i|_{\tilde{h}}}}{1 - 2^{|x_i|_{\tilde{h}}}} + \sum_{1}^{\ell+1} |\tilde{\lambda}_{m+i}| \frac{2^{|x_{m+i}|_{\tilde{h}}}}{1 - 2^{|x_{m+i}|_{\tilde{h}}}}$$

$$= \sum_{i \in I} \tilde{\lambda}_i (f-v-w)(x_i) + \sum_{1}^{\ell+1} \tilde{\lambda}_{m+i} (f-v-w)(x_{m+i})$$

$$= \sum_{i \in I} |\tilde{\lambda}_i| \frac{2^{|x_i|_h}}{1 - 2^{|x_i|_h}} + \sum_{1}^{\ell+1} |\tilde{\lambda}_{m+i}| \frac{2^{|x_{m+i}|_r}}{1 - 2^{|x_{m+i}|_r}}$$

$$=: A .$$

Weiter gilt

$$A = \sum_{i \in I} |\tilde{\lambda}_i| \frac{2^{|x_i|_h}}{1 - 2^{|x_i|_h}} + \sum_{1}^{\ell+1} |\tilde{\lambda}_{m+i}| \frac{2^{|x_{m+i}|_h}}{1 - 2^{|x_{m+i}|_h}}$$

$$+ \sum_{1}^{\ell+1} |\tilde{\lambda}_{m+i}| \cdot \left[\frac{2^{|x_{m+i}|_r}}{1 - 2^{|x_{m+i}|_r}} - \frac{2^{|x_{m+i}|_h}}{1 - 2^{|x_{m+i}|_h}} \right] .$$

Wenn $h < r$ ist, folgt $\tilde{h} > h$. q.e.d.

Zusammenfassung: Durch den Punkteaustausch kommt man von einer Referenz (M,V) zu einer neuen Referenz $(\tilde{M},V)$. Wenn h kleiner als $\varrho^B(f\text{-}v,V_{n-m})$ ist, folgt $\tilde{h} > h$. Ist $\tilde{v} \in V$ eine nivellierte Referenzfunktion von $(\tilde{M},V,f)$, so hat man die Einschließung

$$h < \tilde{h} \leq \varrho^B(f,V) \leq q^B(f\text{-}\tilde{v}) .$$

Die Abschätzung von $\varrho^B(f,V)$ nach unten ist also besser geworden.

Mit den Sätzen 15 und 16 läßt sich leicht folgende Aussage beweisen.

Satz 17: Ist (M,V) eine Referenz der Ordnung m mit $M \subseteq B$ und $\varrho^B(f,V)$ die Referenzabweichung von (M,V,f), dann gibt es eine nivellierte Referenzfunktion $v_o \in V$ von

(M,V,f), welche die Approximationsaufgabe $A(f,V,B)$ löst.

Beweis: Gibt es diese Funktion v_o nicht, dann ist $\varrho^B(f,V)$ kleiner als $\varrho^B(f-v_o,V_{n-m})$. Nach Satz 15 und 16 kann man eine neue Referenz $(\tilde{M},V)$ konstruieren, so daß die Referenzabweichung von $(\tilde{M},V,f)$ größer als $\varrho^B(f,V)$ ist. Das ist jedoch nicht möglich. Also gibt es v_o. q.e.d.

8. Das Töpfer-Verfahren

Das Töpfer-Verfahren besteht aus der Konstruktion einer Folge von Referenzen $(M_k,V)_{k\in\mathbb{N}}$, so daß M_k in B enthalten ist. Es ist in bezug auf die Dimension von V rekursiv. (M_{k+1},V) wird aus (M_k,V) mit dem im siebten Abschnitt beschriebenen Punkteaustausch gewonnen. Die Folge der Referenzabweichungen $h_k \in \mathbb{R}_o^+$ ist monoton wachsend.

Weil für V nicht die Haarsche Bedingung vorausgesetzt wird, braucht die Menge

$$V_B^\perp := \left\{ x \in B \;\middle|\; \bigvee_{u\in V} u(x) = 0 \right\}$$

nicht leer zu sein. Es sei

$$H_B := \sup \left\{ |1_x(f)| \;\middle|\; x \in V_B^{\perp} \right\} \cup \{0\} .$$

Wenn $B \setminus V_B^{\perp}$ nicht leer ist, ist offensichtlich

$$\varrho^B(f,V) = \max \left\{ H_B, \varrho^{B \setminus V_B^{\perp}}(f,V) \right\} .$$

Es existiere eine Referenz (M,V) mit $M \subseteq B$. Das Verfahren wird induktiv erklärt.

(A) In B wird eine Referenz (M_o,V) der Ordnung m_o ausgesucht. $v_o \in V$ sei eine nivellierte Referenzfunktion von (M_o,V,f). Wenn möglich soll M_o in $B \setminus V_B^{\perp}$ enthalten sein. Dann ist $m_o \geq 1$. Andernfalls sei v_o so gewählt, daß für alle $x \in B \setminus V_B^{\perp}$ $f(x) = v_o(x)$ ist.

(Es ist zweckmäßig zu versuchen, M_o in $B_{\varrho^B(f,V)}$ zu wählen, weil für alle $u \in V$ $A_B(f-u) \subseteq \overline{B_{\varrho^B(f,V)}}$ ist, also insbesondere für die Lösungen von $A(f,V,B)$. Zu einer Lösung v von $A(f,V,B)$ gibt es nach Satz 14 eine Referenz (E,V), so daß v eine nivellierte Referenzfunktion und $\varrho^B(f,V)$ die Referenzabweichung von (E,V,f) ist. Also gilt $E \subseteq A_B(f-v) \subseteq \overline{B_{\varrho^B(f,V)}}$.)

(B) (M_k,V) sei eine Referenz der Ordnung m_k mit $M_k \subseteq B$. $v_k \in V$ sei eine nivellierte Referenzfunktion von (M_k,V,f).

(C) $h_k \in \mathbb{R}_o^+$ sei die Referenzabweichung von (M_k,V,f) und η_k eine positive reelle Zahl.

I. $m_k = 0$. (M_k besteht aus einem Punkt.)

1. $h_k \geq H_B - \eta_k$. Dann seien $M_{k+1} := M_k$ und $v_{k+1} := v_k$.

2. $h_k < H_B - \eta_k$. (Weil $m_k = 0$ ist, ist $V_B^\perp \neq \emptyset$.) Man bestimmt einen Punkt $y^k \in V_B^\perp$, so daß $\left|1_{y^k}(f)\right| \geq H_B - \eta_k$ ist und setzt $M_{k+1} := \left\{y^k\right\}$ und $v_{k+1} := v_k$.

II. $m_k > 0 \wedge V_B^\perp \neq \emptyset$. ($B \setminus V_B^\perp$ ist nicht leer, und M_k liegt in $B \setminus V_B^\perp$.) Man bestimmt zunächst einen Punkt $y^k \in V_B^\perp$ mit $\left|1_{y^k}(f)\right| \geq H_B - \eta_k$.

1. $\left|1_{y^k}(f)\right| \geq d^{B \setminus V_B^\perp}(f,v_k)$. Dann seien $M_{k+1} := \left\{y^k\right\}$ und $v_{k+1} := v_k$.

2. $\left|1_{y^k}(f)\right| < d^{B \setminus V_B^\perp}(f,v_k) \wedge h_k \geq d^{B \setminus V_B^\perp}(f,v_k) - \eta_k$. Dann seien $M_{k+1} := M_k$ und $v_{k+1} := v_k$.

3. $\left|1_{y^k}(f)\right| < d^{B \setminus V_B^\perp}(f,v_k) \wedge h_k < d^{B \setminus V_B^\perp}(f,v_k) - \eta_k$. Man löst nun die Approximationsaufgabe $A(f-v_k, V_{n-m_k}, B \setminus V_B^\perp)$ näherungsweise. D.h., man bestimmt eine Referenz (E_k, V_{n-m_k}) der Ordnung $l_k \in \left[0:n-m_k\right]$, so daß E_k in $B \setminus V_B^\perp$ liegt, und eine nivellierte Referenzfunktion $w_k \in V_{n-m_k}$ von $(E_k, V_{n-m_k}, f-v_k)$, so daß

für die Referenzabweichung $r_k \in \mathbb{R}_o^+$ von $(E_k, V_{n-m_k}, f-v_k)$

$$r_k > d^{B\sim V_B^\perp}(f-v_k, w_k) - \eta_k$$

gilt. (Weil $m_k > 0$ ist, existiert E_k in $B\sim V_B^\perp$.)

3a) $\left|1_{y^k}(f)\right| \geq d^{B\sim V_B^\perp}(f, v_k+w_k)$. Dann seien $M_{k+1} := \left\{y^k\right\}$ und $v_{k+1} := v_k+w_k$.

3b) $\left|1_{y^k}(f)\right| < d^{B\sim V_B^\perp}(f, v_k+w_k) \wedge h_k \geq r_k - \eta_k$. Dann seien $M_{k+1} := M_k$ und $v_{k+1} := v_k+w_k$.

3c) $\left|1_{y^k}(f)\right| < d^{B\sim V_B^\perp}(f, v_k+w_k) \wedge h_k < r_k - \eta_k$. Man führt den im siebten Abschnitt beschriebenen Punkteaustausch mit den Referenzen (M_k, V) und (E_k, V_{n-m_k}) durch. Dabei entsteht eine neue Referenz (M_{k+1}, V) der Ordnung m_{k+1}. Weil M_k und E_k in $B\sim V_B^\perp$ liegen, gilt dies auch für M_{k+1}. $v_{k+1} \in V$ sei eine nivellierte Referenzfunktion von (M_{k+1}, V, f).

III. $m_k > 0 \wedge V_B^\perp = \emptyset$.

1. $h_k \geq d^B(f, v_k) - \eta_k$. Dann seien $M_{k+1} := M_k$ und $v_{k+1} := v_k$.

2. $h_k < d^B(f, v_k) - \eta_k$. Man löst die Approximationsaufgabe $A(f-v_k, V_{n-m_k}, B)$ näherungsweise. D.h., man bestimmt eine Referenz (E_k, V_{n-m_k}) der Ordnung $l_k \in [0:n-m_k]$ mit $E_k \subseteq B$ und eine

nivellierte Referenzfunktion $w_k \in V_{n-m_k}$ von $(E_k, V_{n-m_k}, f-v_k)$, so daß für die Referenzabweichung $r_k \in \mathbb{R}_\circ^+$ von $(E_k, V_{n-m_k}, f-v_k)$

$$r_k > d^B(f-v_k, w_k) - \eta_k$$

gilt.

2a) $h_k \geq r_k - \eta_k$. Dann seien $M_{k+1} := M_k$ und $v_{k+1} := v_k + w_k$.

2b) $h_k < r_k - \eta_k$. Man führt den im siebten Abschnitt beschriebenen Punkteaustausch mit den Referenzen (M_k, V) und (E_k, V_{n-m_k}) durch und erhält so eine neue Referenz (M_{k+1}, V) der Ordnung m_{k+1}. M_{k+1} liegt in B. $v_{k+1} \in V$ sei eine nivellierte Referenzfunktion von (M_{k+1}, V, f).

Das Töpfer-Verfahren liefert eine Referenzenfolge $(M_k, V)_{k \in \mathbb{N}}$, eine Funktionenfolge $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ v_k eine nivellierte Referenzfunktion und h_k die Referenzabweichung von von (M_k, V, f) ist. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt die Einschließung

$$h_k \leq \varrho^B(f,V) \leq d^B(f, v_k) \ ,$$

denn es gilt $h_k \leq \varrho^{B \setminus V_B^\perp}(f,V)$ oder $h_k \leq H_B$ und $\varrho^B(f,V) = \max\left\{H_B, \varrho^{B \setminus V_B^\perp}(f,V)\right\}$, wenn $B \setminus V_B^\perp$ nichtleer ist, oder sonst $\varrho^B(f,V) = H_B$.

Satz 18: Entweder gilt für alle $k \in \mathbb{N}_o$ $m_k > 0$, oder es gibt ein $k_o \in \mathbb{N}_o$, so daß für alle $k \geq k_o$ $m_k = 0$ ist und sonst $m_k > 0$ ist.

Entweder ist $k_o = 0$, oder für $k_o - 1$ trifft einer der Fälle II.1 oder II.3a) zu.

Gibt es dieses k_o, so ist $\varrho^B(f,V) = H_B$.

Beweis: Aus der Iterationsvorschrift sieht man, daß $m_{k+1} = 0$ ist, wenn $m_k = 0$ ist. Ist $m_k > 0$, so kann m_{k+1} nur dann 0 sein, wenn für k II.1 oder II.3a) zutrifft. Damit folgen die beiden ersten Teile der Behauptung.

Ist $k_o = 0$, so ist offensichtlich $H_B = \varrho^B(f,V)$. Ist $k_o > 0$, so ist

$$\varrho^B(f,V) = \max\left\{H_B, \varrho^{B \curlywedge V_B^\perp}(f,V)\right\}$$

und man hat

$$H_B \geq \left|{}_y l_{k_o-1}(f)\right| \geq d^{B \curlywedge V_B^\perp}(f, v_{k_o-1}) \geq \varrho^{B \curlywedge V_B^\perp}(f,V)$$

(II.1 für $k_o - 1$) oder

$$H_B \geq \left|{}_y l_{k_o-1}(f)\right| \geq d^{B \curlywedge V_B^\perp}(f, v_{k_o-1} + w_{k_o-1}) \geq \varrho^{B \curlywedge V_B^\perp}(f,V)$$

(II.3a) für $k_o - 1$). q.e.d.

Die Folge $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die aus positiven reellen Zahlen besteht, heißt die Präzision des Verfahrens. η_k ist ein Maß für die Genauigkeit, die man bei den Entscheidungen nach dem k-ten Schritt zugrunde legt und mit der man die Approximationsaufgabe $A(f\text{-}v_k, V_{n-m_k}, B\backsim V_B^\perp)$ näherungsweise löst.

Satz 19: Die Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

Beweis: Sei $k\in\mathbb{N}$. In den Fällen I.1, II.2, II.3b), III.1 und III.2a) ist $h_{k+1} = h_k$.

I.2: Es ist $h_{k+1} = \left|l_{y^k}(f)\right| \geq H_B - \eta_k > h_k$.

II.1: Weil M_k in $B\backsim V_B^\perp$ liegt, gilt

$$h_{k+1} = \left|l_{y^k}(f)\right| \geq d^{B\backsim V_B^\perp}(f,v_k)$$

$$\geq \varrho^{B\backsim V_B}(f,V) \geq h_k .$$

II.3a): Aus dem gleichen Grunde hat man

$$h_{k+1} = \left|l_{y^k}(f)\right| \geq d^{B\backsim V_B}(f,v_k+w_k)$$

$$\geq \varrho^{B\backsim V_B}(f,V) \geq h_k .$$

II.3c) und III.2b): In diesen Fällen wird der Punkteaustausch durchgeführt. Weil $r_k > h_k + \eta_k > h_k$ ist, ist nach Satz 16 $h_{k+1} > h_k$. q.e.d.

Satz 20: Es sei $\lim_k \eta_k = 0$. Ist $k \in \mathbb{N}$ und $h_k < \varrho^B(f,V)$, so gibt es ein $p \in \mathbb{N}$, so daß $h_k < h_{k+p+1}$ ist.

Beweis: Es seien $k \in \mathbb{N}$ und $\Delta_k := \varrho^B(f,V) - h_k > 0$. Weil $\lim_j \eta_j = 0$ ist, gibt es ein $l \in \mathbb{N}$, so daß $\eta_{k+l} \leq \frac{\Delta_k}{3}$ ist.

(a) Für alle $j \in \mathbb{N}$ ist $m_j > 0$. Das bedeutet, daß nur die Fälle II.2, II.3b), II.3c) und III. vorkommen können. Wenn für $j \in [1:l]$ $h_{k+j} = h_k$ ist, gilt

$$\begin{aligned} h_{k+l} = h_k &= \varrho^B(f,V) - \Delta_k \\ &< \varrho^B(f,V) - 2\cdot\eta_{k+l} \\ &= \max\left\{H_B, \varrho^{B\setminus V_B^\perp}(f,V)\right\} - 2\cdot\eta_{k+l} \\ &\leq \max\left\{\left|l_{y_{k+l}}(f)\right|, d^{B\setminus V_B^\perp}(f,v_{k+l})\right\} - \eta_{k+l} \\ &= d^{B\setminus V_B^\perp}(f,v_{k+l}) - \eta_{k+l}\,, \end{aligned}$$

wenn $V_B^\perp \neq \emptyset$ ist, und sonst sofort $h_{k+l} < d^B(f,v_{k+l}) - \eta_{k+l}$.

Für k+l trifft also der Fall II.3 oder III.2 zu. Aus der Vorschrift zur Bestimmung von $(E_{k+l}, V_{n-m_{k+l}})$ folgt weiter

$$\begin{aligned} r_{k+l} &> d^{B\setminus V_B^\perp}(f-v_{k+l}, w_{k+l}) - \eta_{k+l} \\ &\geq \varrho^{B\setminus V_B^\perp}(f,V) - \eta_{k+l}\,. \end{aligned}$$

Es sind nun einige Fälle zu unterscheiden.

1. $\varrho^{B}(f,V) = \varrho^{B \setminus V_B^{\perp}}(f,V)$. Dann folgt sofort

$$r_{k+1} > \varrho^{B}(f,V) - \eta_{k+1}$$

$$= h_{k+1} + \Delta_k - \eta_{k+1} > h_{k+1} + \eta_{k+1} .$$

Also trifft II.3c) oder III.2b) zu. In beiden Fällen hat man mit $p := 1$ $h_{k+p+1} > h_k$.

2. $\varrho^{B}(f,V) > \varrho^{B \setminus V_B^{\perp}}(f,V)$. Dann ist $V_B^{\perp} \neq \emptyset$ und $\varrho^{B}(f,V) = H_B$.

2α) $h_{k+1} < \varrho^{B \setminus V_B^{\perp}}(f,V)$. In diesem Fall sei

$$\Delta'_{k+1} := \varrho^{B \setminus V_B^{\perp}}(f,V) - h_{k+1} .$$

OBdA sei angenommen, daß $\eta_{k+1} \leq \frac{\Delta'_{k+1}}{2}$ ist. Dann folgt

$$r_{k+1} > \varrho^{B \setminus V_B^{\perp}}(f,V) - \eta_{k+1}$$

$$= h_{k+1} + \Delta'_{k+1} - \eta_{k+1} \geq h_{k+1} + \eta_{k+1} .$$

Also trifft hier II.3c) zu. Mit $p := 1$ hat man $h_{k+p+1} > h_k$.

2β) $h_{k+1} = \varrho^{B \setminus V_B^{\perp}}(f,V)$. (" $>$ " ist ausgeschlossen, weil M_{k+1} in $B \setminus V_B^{\perp}$ enthalten ist.) r_{k+1} ist höchstens gleich h_{k+1}, weil man sonst durch einen Punkteaustausch eine Referenzabweichung

bekäme, die größer als $\varrho^{B\searrow V_B^1}(f,V)$ wäre.

II.3a) ist ausgeschlossen, weil sonst $m_{k+1+1} = 0$ wäre.

Also trifft II.3b) zu, und es ist $M_{k+1+1} = M_{k+1}$. Außerdem ist $v_{k+1+1} = v_{k+1} + w_{k+1}$. OBdA sei $\eta_{k+1+1} \leq \eta_{k+1}$. Dann hat man

$$\left|l_{y_{k+1+1}}(f)\right| \geq H_B - \eta_{k+1}$$

$$= \varrho^{B\searrow V_B^1}(f,V) + \left[H_B - \varrho^{B\searrow V_B^1}(f,V)\right] - \eta_{k+1}.$$

Weil man oBdA annehmen kann, daß $H_B - \varrho^{B\searrow V_B^1}(f,V) \geq 2\cdot\eta_{k+1}$ ist, folgt

$$\left|l_{y_{k+1+1}}(f)\right| > \varrho^{B\searrow V_B^1}(f,V) + \eta_{k+1}$$

$$= h_{k+1} + \eta_{k+1}$$

$$\geq r_{k+1} + \eta_{k+1}$$

$$> d^{B\searrow V_B^1}(f,v_{k+1+1}) .$$

Also trifft II.1 zu. Entgegen der Voraussetzung ist dann $m_{k+1+2} = 0$. Widerspruch!

Also kommt 2 β) nicht vor.

(b) Es gibt ein $k_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $j \geq k_o$ $m_j = 0$ und sonst $m_j > 0$ ist. OBdA sei $k+1 \geq k_o$, also $m_{k+1} = 0$. Wer für $j \in [1:l]$ $h_{k+j} = h_k$ ist, ist

$$h_{k+l} = \varrho^B(f,V) - \Delta_k = H_B - \Delta_k$$

$$< H_B - \eta_{k+l} .$$

Also trifft I.2 zu. Mit p := l hat man

$$h_{k+p+1} = \left| l_{y_{k+l}}(f) \right| \geq H_B - \eta_{k+l} > h_{k+l} .$$

q.e.d.

Bemerkungen zum Verfahren:

(1) Wenn der Fall I.1, II.2, II.3b), III.1 oder III.2a) in der Praxis im k-ten Schritt auftritt und η_k kleiner als eine vorgegebene positive Schranke ist, bricht man das Verfahren an dieser Stelle ab. Je nachdem, welcher der Fälle eintritt, kann man $\varrho^B(f,V)$ in ein Intervall der Länge η_k oder $2\eta_k$ einschließen.

I.1: Man hat

$$d^B(f,v_k) = H_B = \varrho^B(f,V) .$$

II.2 und III.1: Es gilt

$$d^B(f,v_k) \geq \varrho^B(f,V) = \max\left\{H_B,\ \varrho^{B\setminus V_B^\perp}(f,V)\right\}$$

$$\geq \max\left\{H_B,\ h_k\right\}$$

$$> \max\left\{H_B,\ d^{B\setminus V_B^\perp}(f,v_k)\right\} - \eta_k$$

$$= d^B(f,v_k) - \eta_k\ .$$

II.3b) und III.2a): Hier gilt

$$d^B(f,\hat{v}_k) \geq \varrho^B(f,V) = \max\left\{H_B,\ \varrho^{B\setminus V_B^\perp}(f,V)\right\}$$

$$\geq \max\left\{H_B,\ h_k\right\}$$

$$\geq \max\left\{H_B,\ r_k\right\} - \eta_k$$

$$> \max\left\{H_B,\ d^{B\setminus V_B^\perp}(f,v_k+w_k)\right\} - 2\cdot\eta_k$$

$$= d^B(f,\hat{v}_k) - 2\cdot\eta_k$$

mit $\hat{v}_k = v_k+w_k$.

Als Näherung für eine Minimallösung an f nimmt man v_k bzw. $\hat{v}_k$.

(2) Der Fall, daß $\dim V = n = 0$ ist, ist trivial. Denn Θ ist die Minimallösung an f, und es ist $\varrho^B(f,V) = d^B(f,O)$.

Da das Töpfer-Verfahren in bezug auf die Dimension von V rekursiv angelegt ist, kommt der Fall n = 0 vor. Ist die Ordnung von (M_k,V) n, so ist $V_{n-m_k} = V_o = \{\Theta\}$.

Wie behandelt das Töpfer-Verfahren die Approximationsaufgabe $A(f,\{\Theta\},B)$? Man hat eine Folge von Punkten $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ zu bestimmen, so daß

$$\lim_k \left| l_{x^k}(f) \right| = d^B(f,\Theta)$$

ist. Das Töpfer-Verfahren ist in diesem Fall also nichts anderes als eine Methode zur näherungsweisen Bestimmung eines Abweichungspunktes von f.

9. Die Konvergenz des Töpfer-Verfahrens

Es sei $k \in \mathbb{N}$. Wenn nach dem k-ten Schritt des Töpfer-Verfahrens einer der Fälle I.1, I.2, II.1, II.2 oder III.1 vorliegt, dann sei $\hat{v}_k := v_k$. Liegt dagegen der Fall II.3 oder III.2 vor, dann seien $w_k \in V_{n-m_k}$ die nivellierte Referenzfunktion von

$(E_k, V_{n-m_k}, f-v_k)$, die bei der näherungsweisen Lösung der Aufgabe $A(f-v_k, V_{n-m_k}, B \setminus V_B^\perp)$ berechnet wird und $\hat{v}_k := v_k + w_k$. Weil $w_k \in V_{n-m_k}$ ist, ist $\hat{v}_k$ stets eine nivellierte Referenzfunktion von (M_k, V, f).

Es existiere eine Referenz (M,V) mit $M \subseteq B$. Um einen Trivialfall auszuschließen, sei $f|B \notin \left\{ u|B \;\middle|\; u \in V \right\}$. Dann ist $\varrho^B(f,V) > 0$. Wegen Satz 20 gibt es ein $k_o \in \mathbb{N}$, so daß $h_{k_o} > 0$ ist. Für alle $k \geq k_o$ gilt

$$M_k \subseteq B_{h_{k_o}} ,$$

weil die Folge $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton wächst. Es seien

$$M := B_{h_{k_o}} \cup \bigcup_{k=0}^{k_o} M_k$$

und $t := \sup \left\{ |x| \;\middle|\; x \in M \right\}$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $i \in [0:m_k]$ gilt demnach $x_i^k \in [-t,t]$.

Die Folge $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist durch $\varrho^B(f,V)$ nach oben beschränkt. Wegen Satz 19 konvergiert $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und es gibt ein $h^* \in \mathbb{R}^+$, so daß

$$\lim_k h_k = h^* \leq \varrho^B(f,V)$$

ist.

Satz 21: Es gelte:

(i) $\lim_k \eta_k = 0$ und

(ii) es gibt ein $K \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\sup \left\{ |f-\hat{v}_k|(x) \mid x \in B \cap M \right\} \leq K$$

ist.

Dann ist $h^* = \varrho^B(f,V)$, $(\hat{v}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Minimalfolge für f, und es gibt eine Teilfolge $(\hat{v}_{\psi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(\hat{v}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, die im Sinne von d^B gegen eine Lösung von A(f,V,B) konvergiert.

Beweis: I. Es gibt ein $\bar{k} \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $k \geq \bar{k}$ $m_k = 0$ ist und sonst $m_k > 0$ ist. Für $k \geq \bar{k}$ kommen dann nur die Fälle I.1 und I.2 in Frage. Deshalb ist für alle $k \geq \bar{k}$ $\hat{v}_k = \hat{v}_{\bar{k}}$ und

$$d^B(f,\hat{v}_k) = H_B = \varrho^B(f,V) .$$

D.h., $(\hat{v}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Minimalfolge für f. Weil $\lim_k \eta_k = 0$ ist, gibt es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $k \in \mathbb{N}$, $k \geq \bar{k}$, so daß

$$h_{k+1} = \left| l_{y_k}(f) \right| \geq H_B - \eta_k \geq \varrho^B(f,V) - \varepsilon$$

ist. Also ist $\lim_k h_k = h^* = \varrho^B(f,V)$.

II. Der rekursiven Anlage des Töpfer-Verfahrens folgend, wird der Beweis für den allgemeinen Fall durch vollständige Induktion über dim V geführt.

(IA) dim V = 0. Dann ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$ $m_k = 0$, und die Behauptung folgt aus I..

(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Aussage von Satz 21 sei für alle linearen Teilräume V von X mit $\dim V \in [0:n-1]$ und alle Teilmengen B von $\mathbb{R}$ wahr, zu denen es eine Referenz (M,V) mit $M \subseteq B$ gibt.

$\Longrightarrow$ Damit ist die Durchführung des Töpfer-Verfahrens für lineare Teilräume V von X mit $\dim V = n$ möglich. (Siehe Fall II.3 und III.2!)

(IS) dim V = n. Wegen I. gelte für alle $k \in \mathbb{N}$ $m_k > 0$. Dann ist $\dim V_{n-m_k} = n-m_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ kleiner als n.

(1) Es gibt ein $\hat{k} \in \mathbb{N}$ mit $h_{\hat{k}} = \varrho^B(f,V)$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq \hat{k}$ $h_k = h_{\hat{k}}$ und $\hat{v}_k = \hat{v}_{\hat{k}}$. Die Behauptung ist bewiesen.

(2) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gelte $h_k < \varrho^B(f,V)$. Dann gibt es nach Satz 20 zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $p \in \mathbb{N}$, so daß $h_k < h_{k+p+1}$ ist.

Für $k \in \mathbb{N}$ seien $\lambda_0^k, \ldots, \lambda_{m_k}^k$ charakteristische Zahlen von (M_k,V). Zusätzlich sei für $k \in \mathbb{N}$ und $i \in [m_k+1:n]$ $\lambda_i^k := 0$. Damit sind n+1 Folgen $(\lambda_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$ für $i \in [0:n]$ definiert.

Beh.: Es gibt eine Partition (I,J) von $[0:n]$, so daß $J \neq \emptyset$ ist,

und eine injektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften:

(i) Für $i \in I$ gilt $\lim_k \lambda_i^{\varphi(k)} = 0$.

(ii) Für $i \in J$ gilt $\lim_k \lambda_i^{\varphi(k)} = \lambda_i \neq 0$.

(iii) Für $i \in J$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $\lambda_i^{\varphi(k)} \cdot \lambda_i^{\varphi(k+1)} > 0$.

Zur Konstruktion von (I,J) und φ siehe CARASSO [2] Theorem 2.1 und 6.1. J ist nichtleer, weil für alle $k \in \mathbb{N}$ die Normierung $\sum |\lambda_i^k| = 1$ gilt.

Beh.: Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $l \in \mathbb{N}$, $l > k$, so daß

$$\left\{ x_i^{\varphi(l)} \mid i \in J \right\} \not\subseteq M_{\varphi(k)}$$

ist.

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$. Annahme: Für alle $l \in \mathbb{N}$, $l > k$ gilt

$$\left\{ x_i^{\varphi(l)} \mid i \in J \right\} \subseteq M_{\varphi(k)} .$$

Weil $M_{\varphi(k)}$ endlich ist, gibt es eine injektive Abbildung $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so daß $(\chi(j))_{j \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(\varphi(j))_{j \in \mathbb{N}}$ ist, für $j < k$ $\chi(j) = \varphi(j)$ ist und für $j \geq k$ und $i \in J$ $x_i^{\chi(j)} = x_i^{\chi(k)}$ gilt.

Dann folgt für alle $u \in V$

$$0 = \lim_{j} \sum_{i=0}^{m_{\chi(j)}} \lambda_i^{\chi(j)} u(x_i^{\chi(j)})$$

$$= \sum_{i \in J} \lambda_i u(x_i^{\chi(k)}) \ .$$

Also gilt für alle $u \in V$ und alle $j \geq k$

$$\sum_{i=0}^{m_{\chi(j)}} \lambda_i^{\chi(j)} u(x_i^{\chi(k)}) = 0 = \sum_{i \in J} \lambda_i u(x_i^{\chi(k)}) \ .$$

Weil $(M_{\chi(j)}, V)$ für $j \geq k$ eine Referenz ist, ist für $j \geq k$ $M_{\chi(j)} = M_{\chi(k)}$. Dann muß $h_{\chi(j)} = h_{\chi(k)}$ für $j \geq k$ gelten. Das ist jedoch nach der zu Anfang getroffenen Voraussetzung nicht möglich.

Also gibt es ein $l \in \mathbb{N}$, $l > k$, so daß

$$\left\{ x_i^{\varphi(l)} \mid i \in J \right\} \not\subseteq M_{\varphi(k)}$$

ist.

Wegen der soeben bewiesenen Aussage kann man oBdA annehmen, daß für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left\{ x_i^{\varphi(k+1)} \mid i \in J \right\} \not\subseteq M_{\varphi(k)}$$

gilt.

Für $k \in \mathbb{N}$ sei nun

$$\psi(k) := \max\left\{ j \in \mathbb{N} \;\middle|\; \varphi(k) \leq j < \varphi(k+1) \wedge \left\{ x_i^{\varphi(k+1)} \;\middle|\; i \in J \right\} \not\subseteq M_j \right\} .$$

D.h., dijenigen Elemente von $\left\{ x_i^{\varphi(k+1)} \;\middle|\; i \in J \right\}$, die nicht in $M_{\psi(k)}$ enthalten sind, werden beim $\psi(k)$-ten Schritt hinzugenommen. Beim $\psi(k)$-ten Schritt liegt also der Fall II.3c) oder III.2b) vor. Es gilt $\left\{ x_i^{\varphi(k+1)} \;\middle|\; i \in J \right\} \subseteq M_{\psi(k)+1}$.

Für $k \in \mathbb{N}$ sei (I_k, J_k, L_k) die folgende Partition von $\left[0{:}m_{\varphi(k+1)}\right]$:

$$i \in I_k \;:\Longleftrightarrow\; i \in I \cap \left[0{:}m_{\varphi(k+1)}\right]$$

$$i \in J_k \;:\Longleftrightarrow\; i \in J \wedge x_i^{\varphi(k+1)} \notin M_{\psi(k)}$$

$$i \in L_k \;:\Longleftrightarrow\; i \in J \wedge x_i^{\varphi(k+1)} \in M_{\psi(k)} .$$

Es sei nun $k \in \mathbb{N}$. Weil $\hat{v}_{\psi(k)}$ eine nivellierte Referenzfunktion von $(M_{\psi(k)}, V, f)$ ist, gilt für alle $i \in L_k$

$$(f\text{-}\hat{v}_{\psi(k)})(x_i^{\varphi(k+1)}) = \operatorname{sign}(\lambda_{\sigma(i)}^{\psi(k)}) \frac{2^{\left|x_i^{\varphi(k+1)}\right|_{h_{\psi(k)}}}}{1 - 2^{\left|x_i^{\varphi(k+1)}\right|_{h_{\psi(k)}}}}$$

$$= \operatorname{sign}(\lambda_i^{\varphi(k+1)}) \frac{2^{\left|x_i^{\varphi(k+1)}\right|_{h_{\psi(k)}}}}{1 - 2^{\left|x_i^{\varphi(k+1)}\right|_{h_{\psi(k)}}}} .$$

Dabei ist $\sigma(i)$ der Index, den $x_i^{\varphi(k+1)}$ in der Menge $M_{\psi(k)}$ hat, also $x_i^{\varphi(k+1)} = x_{\sigma(i)}^{\psi(k)}$. Aus Abschnitt 7 über den Punkteaustausch folgt, daß $\operatorname{sign}(\lambda_{\sigma(i)}^{\psi(k)}) = \operatorname{sign}(\lambda_i^{\varphi(k+1)})$ ist.

Nach der Konstruktion der Referenz $(E_{\psi(k)}, V_{n-m_{\psi(k)}})$ gilt für $i \in J_k$

$$(f-\hat{v}_{\psi(k)})(x_i^{\varphi(k+1)}) = \operatorname{sign}(\lambda_{\tau(i)}^{\psi(k)+1}) \frac{2^{\left|x_i^{\varphi(k+1)}\right|} r_{\psi(k)}}{1 - 2^{\left|x_i^{\varphi(k+1)}\right|} r_{\psi(k)}} .$$

Hier ist $\tau(i)$ der Index von $x_i^{\varphi(k+1)}$ in der Menge $M_{\psi(k)+1}$. Weil nach Abschnitt 7 $\operatorname{sign}(\lambda_{\tau(i)}^{\psi(k)+1}) = \operatorname{sign}(\lambda_i^{\varphi(k+1)})$ ist, folgt für $i \in J_k$

$$(f-\hat{v}_{\psi(k)})(x_i^{\varphi(k+1)}) = \operatorname{sign}(\lambda_i^{\varphi(k+1)}) \frac{2^{\left|x_i^{\varphi(k+1)}\right|} r_{\psi(k)}}{1 - 2^{\left|x_i^{\varphi(k+1)}\right|} r_{\psi(k)}} .$$

Damit erhält man

$$\sum_{0}^{m_{\varphi(k+1)}} \left|\lambda_i^{\varphi(k+1)}\right| \frac{2^{\left|x_i^{\varphi(k+1)}\right|} h_{\varphi(k+1)}}{1 - 2^{\left|x_i^{\varphi(k+1)}\right|} h_{\varphi(k+1)}}$$

$$= \sum_{0}^{m_{\varphi(k+1)}} \lambda_i^{\varphi(k+1)} f(x_i^{\varphi(k+1)}) =: B .$$

Weiter gilt

$$R = \sum_{i \in \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k} \lambda_i^{\varphi(k+1)} (f - \hat{v}_{\psi(k)}) (x_i^{\varphi(k+1)})$$

$$= \sum_{0}^{m_{\varphi(k+1)}} |\lambda_i^{\varphi(k+1)}| \frac{2^{|x_i^{\varphi(k+1)}|_{h_{\psi(k)}}}}{1 - 2^{|x_i^{\varphi(k+1)}|_{h_{\psi(k)}}}}$$

$$+ \sum_{i \in J_k} |\lambda_i^{\varphi(k+1)}| \cdot \left[\frac{2^{|x_i^{\varphi(k+1)}|_{r_{\psi(k)}}}}{1 - 2^{|x_i^{\varphi(k+1)}|_{r_{\psi(k)}}}} - \frac{2^{|x_i^{\varphi(k+1)}|_{h_{\psi(k)}}}}{1 - 2^{|x_i^{\varphi(k+1)}|_{h_{\psi(k)}}}} \right]$$

$$+ \sum_{i \in I_k} |\lambda_i^{\varphi(k+1)}| \cdot \left[\varepsilon_i^k (f - \hat{v}_{\psi(k)}) (x_i^{\varphi(k+1)}) - \frac{2^{|x_i^{\varphi(k+1)}|_{h_{\psi(k)}}}}{1 - 2^{|x_i^{\varphi(k+1)}|_{h_{\psi(k)}}}} \right] .$$

Hierbei ist $\varepsilon_i^k = \operatorname{sign}(\lambda_i^{\varphi(k+1)})$ für $i \in I_k$.

Es seien

$$c(k) := \sum_{i \in I_k} \left|\lambda_i^{\varphi(k+1)}\right|$$

und

$$R(k) := \sum_{i \in I_k} \left|\lambda_i^{\varphi(k+1)}\right| \cdot \left[\varepsilon_i^k (f-\hat{v}_{\psi(k)})(x_i^{\varphi(k+1)}) - \frac{2^{\left|x_i^{\varphi(k+1)}\right|} h_{\psi(k)}}{1 - 2^{\left|x_i^{\varphi(k+1)}\right|} h_{\psi(k)}} \right] .$$

Für $i \in I_k$ gilt mit der nach Voraussetzung (ii) existierenden positiven reellen Zahl K

$$\frac{2^{\left|x_i^{\varphi(k+1)}\right|} h_{\psi(k)}}{1 - 2^{\left|x_i^{\varphi(k+1)}\right|} h_{\psi(k)}} \leq \frac{2^{\left|x_i^{\varphi(k+1)}\right|} h_{\varphi(k+1)}}{1 - 2^{\left|x_i^{\varphi(k+1)}\right|} h_{\varphi(k+1)}}$$

$$= \left|f-\hat{v}_{\varphi(k+1)}\right| (x_i^{\varphi(k+1)}) \leq K ,$$

weil $x_i^{\varphi(k+1)} \in B \cap M$ ist. Deshalb gilt

$$|R(k)| \leq c(k) \cdot (K+K) =: c(k) \cdot K^* .$$

Weil $h_{\psi(k)} < h_{\varphi(k+1)}$ ist, gilt für $i \in [0{:}m_{\varphi(k+1)}]$

$$\frac{2^{|x_i^{\varphi(k+1)}|}\, h_{\varphi(k+1)}}{1 - 2^{|x_i^{\varphi(k+1)}|}\, h_{\varphi(k+1)}} - \frac{2^{|x_i^{\varphi(k+1)}|}\, h_{\psi(k)}}{1 - 2^{|x_i^{\varphi(k+1)}|}\, h_{\psi(k)}}$$

$$\leq \frac{2^{|x_i^{\varphi(k+1)}|}}{\left[1 - 2^{|x_i^{\varphi(k+1)}|}\, h_{\varphi(k+1)}\right]^2} (h_{\varphi(k+1)} - h_{\psi(k)})$$

$$\leq 2^t \cdot (1+K)^2 \cdot (h_{\varphi(k+1)} - h_{\psi(k)}) .$$

(Für $i \in [0{:}m_{\varphi(k+1)}]$ ist $2^{|x_i^{\varphi(k+1)}|}\, h_{\varphi(k+1)} \leq \frac{K}{1+K}$.)

Für $i \in J_k$ gilt, weil $r_{\psi(k)} > d^{B \setminus V_B^{\perp}}(f, \hat{v}_{\psi(k)}) - \eta_{\psi(k)}$ ist,

$$\frac{2^{|x_i^{\varphi(k+1)}|}\, r_{\psi(k)}}{1 - 2^{|x_i^{\varphi(k+1)}|}\, r_{\psi(k)}} - \frac{2^{|x_i^{\varphi(k+1)}|}\, h_{\psi(k)}}{1 - 2^{|x_i^{\varphi(k+1)}|}\, h_{\psi(k)}}$$

$$\geq r_{\psi(k)} - h_{\psi(k)}$$

$$\geq d^{B \setminus V_B^{\perp}}(f, \hat{v}_{\psi(k)}) - h_{\psi(k)} - \eta_{\psi(k)} .$$

Damit erhält man die Abschätzung

$$2^t \cdot (1+K)^2 \cdot (h_{\varphi(k+1)} - h_{\varphi(k)})$$

$$\geq \sum_{i \in J_k} |\lambda_i^{\varphi(k+1)}| \cdot \left[d^{B \vee V_B^\perp}(f, \hat{v}_{\varphi(k)}) - h_{\varphi(k)} \right] - \eta_{\varphi(k)}$$

$$- c(k) \cdot K^* .$$

Es sei $s := \frac{1}{2} \min \left\{ |\lambda_i| \mid i \in J \right\}$. s ist positiv. Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $J_k \neq \emptyset$. Also gibt es ein $\tilde{k} \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq \tilde{k}$

$$\sum_{i \in J_k} |\lambda_i^{\varphi(k+1)}| \geq s > 0$$

ist. Weil $(c(k))_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Nullfolgen sind und die Folge $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend gegen h^* konvergiert, ist $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$b_k := \frac{1}{s} \left[2^t \cdot (1+K)^2 \cdot (h_{\varphi(k+1)} - h_{\varphi(k)}) + \eta_{\varphi(k)} \right.$$

$$\left. + c(k) \cdot K^* \right]$$

auch eine Nullfolge. $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Majorante von $(d^{B \vee V_B^\perp}(f, \hat{v}_{\varphi(k)}) - h_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$. Also gilt

$$0 = \lim_k \left[d^{B \vee V_B^\perp}(f, \hat{v}_{\varphi(k)}) - h_{\varphi(k)} \right] .$$

Weil für alle $k \in \mathbb{N}$

$$d^{B\,V_B^\perp}(f,\hat{v}_{\psi(k)}) \geq \varrho^{B\setminus V_B^\perp}(f,V) \geq h^* \geq h_{\psi(k)}$$

gilt, muß $\varrho^{B\,V_B^\perp}(f,V) = h^*$ und $(\hat{v}_{\psi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge für f (auf $B\setminus V_B^\perp$) sein.

Es ist $\varrho^B(f,V) = \max\left\{H_B, \varrho^{B\setminus V_B^\perp}(f,V)\right\}$.

Annahme: Es ist $\Delta := \varrho^B(f,V) - \varrho^{B\setminus V_B^\perp}(f,V) > 0$. ($V_B^\perp$ und $B\setminus V_B^\perp$ sind also nicht leer.)

Dann gibt es ein $p \in \mathbb{N}$, so daß $\eta_{\psi(p)} \leq \frac{\Delta}{3}$ ist und (nach dem oben gezeigten)

$$d^{B\setminus V_B^\perp}(f,\hat{v}_{\psi(p)}) - h_{\psi(p)} \leq \frac{\Delta}{3}$$

ist. Man hat deshalb für $\psi(p)$ den Fall, daß $m_{\psi(p)} > 0$ ist und

$$\left|1_{y_{\psi(p)}}(f)\right| \geq H_B - \eta_{\psi(p)} = \varrho^B(f,V) - \eta_{\psi(p)}$$

$$\geq \varrho^{B\setminus V_B^\perp}(f,V) + 2\cdot\eta_{\psi(p)}$$

$$\geq h_{\psi(p)} + 2\cdot\eta_{\psi(p)}$$

ist. Auf Grund der Auswahl von p folgt daraus

$$\left|1_{y^{\psi(p)}}(f)\right| > d^{B\setminus V^{\perp}_{B}}(f,\hat{v}_{\psi(p)}) \ .$$

Wenn $v_{\psi(p)} = \hat{v}_{\psi(p)}$ ist, liegt also der Fall II.1 vor und sonst der Fall II.3a). Entgegen der Voraussetzung wäre in beiden Fällen $m_{\psi(p)+1} = 0$.

Also ist $\varrho^{B}(f,V) = \varrho^{B\setminus V^{\perp}_{B}}(f,V)$. Deshalb ist $h^{*} = \varrho^{B}(f,V)$ und $(\hat{v}_{\psi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ auch auf B eine Minimalfolge für f.

Annahme: $(\hat{v}_{k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist keine Minimalfolge für f. Dann gibt es ein $\varepsilon_{o} \in \mathbb{R}^{+}$ und eine Teilfolge $(\hat{v}_{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(\hat{v}_{k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$d^{B}(f,\hat{v}_{\alpha(k)}) \geq \varrho^{B}(f,V) + \varepsilon_{o}$$

für $k\in\mathbb{N}$. Weil gleich zu Anfang von Teil II.(IS)(2) dieses Beweises zu einer Teilfolge von $(\hat{v}_{k})_{k\in\mathbb{N}}$ übergegangen wurde, ohne auf die Konstruktion von M_{k+1} aus M_{k} Rücksicht zu nehmen, folgt wie oben, daß $(\hat{v}_{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge hat, die Minimalfolge für f ist.

$\Longrightarrow$ Widerspruch zur Annahme. Also ist $(\hat{v}_{k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge für f.

III. Weil V B-approximativ-kompakt ist und $(\hat{v}_{k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge für f ist, hat $(\hat{v}_{k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die im Sinne von d^{B} gegen eine Lösung von A(f,V,B) konvergiert.

q.e.d.

III. Haarsche Bedingung und Remez-Verfahren

Setzt man voraus, daß der approximierende Vektorraum V die Haarsche Bedingung (Def. siehe unten) erfüllt und außerdem B zusammenhängend ist, so ist die Aufgabe A(f,V,B) eindeutig lösbar und man kann Minimallösungen an f mit dem Alternantenkriterium charakterisieren. Wie stark die Haarsche Bedingung ist, kann man einem Satz von MAIRHUBER [4] entnehmen:

Ist Q ein kompakter topologischer Raum, dann gibt es genau dann einen endlichdimensionalen Teilraum V von $\mathcal{C}(Q)$ mit $\dim V \geq 2$, der die Haarsche Bedingung erfüllt, wenn Q in die Kreislinie topologisch eingebettet werden kann.

10. Die Haarsche Bedingung

V sei wieder ein linearer Teilraum von X, der die Dimension n ($n \in \mathbb{N}_0$) hat, und B eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, die wenigstens n+1 Punkte enthält.

Def. 9: V erfüllt die Haarsche Bedingung (HB), wenn für alle Teilmengen E von B, die aus n+1 Punkten bestehen, gilt, daß (E,V) eine Referenz ist.

Wenn V die Haarsche Bedingung (HB) erfüllt und (E,V) mit $E \subseteq B$ eine Referenz ist, so muß E offenbar aus genau n+1 Punkten bestehen.

Satz 22: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) V erfüllt die Haarsche Bedingung (HB).

(b) Ist $\{v_i \mid i \in [1:n]\}$ eine Basis von V und $E = \{x_i \mid i \in [1:n]\}$ eine Teilmenge von B mit $x_i < x_{i+1}$ für $i \in [1:n-1]$, dann ist $\det(v_i(x_j))$ von 0 verschieden.

(c) Ist E eine nichtleere Teilmenge von B und hat (E,V) die Eigenschaft (I), dann besteht E aus n+1 Punkten.

(d) Ist $v \in V \setminus \{\theta\}$, dann gibt es in B höchstens n-1 paarweise verschiedene Punkte, die Nullstellen von v sind.

Beispiele für Vektorräume, die die Haarsche Bedingung erfüllen, sind hinlänglich bekannt.

Aus der Approximationstheorie in normierten Räumen sind eine Reihe von Sätzen bekannt, die die Bedeutung der Haarschen Bedingung für die lineare Approximation aufzeigen. Anhand einer Auswahl dieser Sätze wird nun gezeigt, daß die Haarsche Bedingung bei der linearen Approximation in $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ eine analoge Rolle spielt.

Es sei wieder $f \in X \setminus V$. Ferner seien $x_i \in B$ mit $i \in [1:n+1]$ und $x_i < x_{i+1}$ für $i \in [1:n]$. B sei zusammenhängend und V erfülle die Haarsche Bedingung (HB).

Satz 23: Ist $v \in V$ und gibt es ein $z \in \{-1,1\}$, so daß für $i \in [1:n+1]$

$$\operatorname{sign} \cdot l_{x_i}(f-v) = z \cdot (-1)^i$$

ist, dann gilt

$$\min \left\{ \left| l_{x_i}(f-v) \right| \;\middle|\; i \in [1:n+1] \right\} \leq \varrho^B(f,V) .$$

Beweis: Annahme: Für alle $i \in [1:n+1]$ gilt

$$\varrho^B(f,V) < \left| l_{x_i}(f-v) \right| .$$

Dann gibt es ein $\tilde{v} \in V$, so daß für $i \in [1:n+1]$

$$\varrho^B(f,V) \leq d^B(f,\tilde{v}) < \left| l_{x_i}(f-v) \right|$$

gilt. Daher folgt für $i \in [1:n+1]$

$$\left| l_{x_i}(f-\tilde{v}) \right| < \left| l_{x_i}(f-v) \right|$$

und

$$\left| f(x_i) - \tilde{v}(x_i) \right| < \left| f(x_i) - v(x_i) \right| .$$

Für $i \in [1:n+1]$ folgt daraus

$$z \cdot (-1)^i (f(x_i) - \tilde{v}(x_i)) < z \cdot (-1)^i (f(x_i) - v(x_i)),$$

weil $\operatorname{sign} \circ l_{x_i}(f-v) = \operatorname{sign}(f(x_i) - v(x_i))$ ist. Also gilt

$$\bigvee_{i=1}^{n+1} z \cdot (-1)^i (v(x_i) - \tilde{v}(x_i)) < 0 .$$

Weil B zusammenhängend ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, daß $v-\tilde{v}$ in B n Nullstellen hat. Da V die Haarsche Bedingung (HB) erfüllt, muß $v = \tilde{v}$ sein.

Dies widerspricht der Annahme. q.e.d.

Satz 24: Ist $v \in V$ und gibt es ein $z \in \{-1,1\}$, so daß für $i \in [1:n+1]$

$$l_{x_i}(f-v) = z \cdot (-1)^i \cdot d^B(f,v)$$

gilt, so ist v eine Minimallösung an f.

Beweis: Es ist

$$\min \left\{ \left| l_{x_i}(f-v) \right| \;\middle|\; i \in [1:n+1] \right\} = d^B(f,v)$$

und nach Satz 23 deshalb $d^B(f,v) \leq \varrho^B(f,V)$. q.e.d.

Satz 25: (Alternantenkriterium) $v_o \in V$ ist genau dann eine Minimallösung an f, wenn es n+1 Punkte $x_i \in B$, $i \in [1:n+1]$ mit $x_i < x_{i+1}$ für $i \in [1:n]$ und ein $z \in \{-1,1\}$ gibt, so daß für $i \in [1:n+1]$

$$l_{x_i}(f-v_o) = z \cdot (-1)^i \varrho^B(f,V)$$

gilt.

Beweis: Daß die Bedingung für eine Minimallösung an f hinreichend ist, sagt schon Satz 24. Es bleibt die Notwendigkeit zu zeigen.

$v_o \in V$ sei eine Minimallösung an f. Dann gibt es nach Satz 14 eine Referenz (E,V), $E \subseteq \overline{B}$, so daß v_o eine nivellierte Referenzfunktion und $\varrho^B(f,V)$ die Referenzabweichung von (E,V,f) sind. Weil V die Haarsche Bedingung (HB) erfüllt, besteht E aus n+1 Punkten x_i, $i \in [1:n+1]$ mit $x_i < x_{i+1}$ für $i \in [1:n]$.

Für $i \in [1:n+1]$ sei

$$L_{x_i} := (-1)^i \cdot F_{x_i} .$$

$\{v_i \mid i \in [1:n]\}$ sei eine Basis von V. Ferner seien C die $(n+1)\times(n+1)$-Matrix (c_{ij}) mit den Komponenten $c_{ij} = L_{x_j}(v_i)$ für $(i,j) \in [1:n]\times[1:n+1]$ und $c_{n+1,j} = 1$ für $j \in [1:n+1]$ sowie $b := (0,\ldots,0,1)'$ mit n+1 Komponenten.

Nach Farkas hat entweder $C\lambda = b,\ \lambda \geqslant \Theta$ eine Lösung $\lambda \in \mathbb{R}^{n+1}$ oder $C'\alpha \geqslant \Theta,\ b'\alpha < 0$ hat eine Lösung $\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Annahme: $C'\alpha \geqslant \Theta,\ b'\alpha < 0$ hat eine Lösung $\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$. D.h., es gibt reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und α_o, so daß für $i \in [1:n+1]$

$$\sum_{1}^{n} \alpha_j L_{x_i}(v_j) + \alpha_o \geqslant 0$$

und $\alpha_o < 0$ ist. Also gilt für $i \in [1:n+1]$

$$(-1)^i \sum_{1}^{n} \alpha_j v_j(x_i) =: (-1)^i v(x_i) > 0 .$$

Weil B zusammenhängend ist, folgt, daß v in B n Nullstellen hat. Also muß für $i \in [1:n]$ $\alpha_i = 0$ sein.

Daraus ergibt sich ein Widerspruch zu der Annahme, daß $\alpha_o < 0$ ist.

Damit ist gezeigt, daß $C\lambda = b,\ \lambda \geqslant \Theta$ eine Lösung $\lambda \in \mathbb{R}^{n+1}$ hat. Für $i \in [1:n+1]$ sei

$$\nu_i := (-1)^i \cdot \lambda_i .$$

$\nu_1, \ldots, \nu_{n+1}$ sind offenbar charakteristische Zahlen von (E,V). Weil (E,V) die Ordnung n hat, sind alle ν_i von 0 verschieden. Daher gilt für $i \in [1:n+1]$

$$\operatorname{sign}(\nu_i) = (-1)^i .$$

Weil v_o eine nivellierte Referenzfunktion und $\varrho^B(f,V)$ die Referenzabweichung von (E,V,f) sind, gibt es ein $z \in \{-1,1\}$, so daß für $i \in [1:n+1]$

$$l_{x_i}(f-v_o) = z \cdot (-1)^i \varrho^B(f,V)$$

gilt. q.e.d.

Mit Hilfe des Alternantenkriteriums läßt sich nun leicht beweisen, daß A(f,V,B) genau eine Lösung hat, wenn B zusammenhängend ist und V die Haarsche Bedingung (HB) erfüllt.

Satz 26: Es gibt genau eine Minimallösung an f.

Beweis: Nach Satz 6 hat A(f,V,B) eine Lösung.

Annahme: $v_1, v_2 \in V$ sind Lösungen von A(f,V,B). Dann ist auch $\bar{v} := \frac{1}{2}(v_1+v_2)$ eine Lösung von A(f,V,B). Denn es gilt für $x \in B$

$$(*) \qquad (f-\bar{v})(x) = \tfrac{1}{2}(f-v_1)(x) + \tfrac{1}{2}(f-v_2)(x) ,$$

$$|f-\bar{v}|(x) \leq \max\left\{|f-v_1|(x),\ |f-v_2|(x)\right\}$$

und daher

$$|l_x(f-\bar{v})| \leq \max\left\{|l_x(f-v_1)|,\ |l_x(f-v_2)|\right\} .$$

Weiter folgt

$$|l_x(f-\bar{v})| \leq \max\left\{d^B(f,v_1),\ d^B(f,v_2)\right\}$$

$$= \varrho^B(f,V) \ .$$

Zu $\bar{v}$ gibt es nach Satz 25 n+1 Punkte $x_i \in B$, $i \in [1:n+1]$ mit $x_i < x_{i+1}$ für $i \in [1:n]$ und ein $z \in \{-1,1\}$, so daß für $i \in [1:n+1]$

$$l_{x_i}(f-\bar{v}) = z\cdot(-1)^i\cdot\varrho^B(f,V)$$

gilt. Für $i \in [1:n+1]$ erhält man

$$z\cdot(-1)^i l_{x_i}(f-v_1),\ z\cdot(-1)^i l_{x_i}(f-v_2) \leq z\cdot(-1)^i l_{x_i}(f-\bar{v}) \ ,$$

also auch

$$z\cdot(-1)^i(f-v_1)(x_i),\ z\cdot(-1)^i(f-v_2)(x_i) \leq z\cdot(-1)^i(f-\bar{v})(x_i) \ .$$

Wegen (*) folgt für $i \in [1:n+1]$

$$(f-v_1)(x_i) = (f-\bar{v})(x_i) = (f-v_2)(x_i) \ .$$

D.h., $\bar{v}-v_1$ und $\bar{v}-v_2$ haben n Nullstellen in B. Mit Satz 20 folgt $v_1 = \bar{v} = v_2$.

Also gilt die Behauptung. q.e.d.

11. Das Remez-Verfahren

Im folgenden wird der Index B fortgelassen, wenn $B = \mathbb{R}$ ist.

Um die Aufgabe $A(f,V,\mathbb{R})$ zu lösen, kann man das in Abschnitt 8 beschriebene Töpfer-Verfahren verwenden. Weil für V die Bedingung (H) vorausgesetzt ist, erhält man einen bekannten Spezialfall, das Remez-Verfahren. (Zum Remez-Verfahren in normierten Räumen vergleiche etwa LAURENT [3].) Es sei $f \in X \setminus V$.

Konstruiert man nach der Vorschrift von Abschnitt 8 eine Folge von Referenzen $(M_k,V)_{k \in \mathbb{N}}$, so ist folgendes zu bemerken:

(a) Wenn die Dimension von V größer als 0 ist, ist $V^{\perp}$ leer.

(b) Wegen der Bedingung (H) haben alle Referenzen (M_k,V) die Ordnung $m_k = n$. D.h., für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $V_{n-m_k} = \{\Theta\}$. Wenn n positiv ist, kann für $k \in \mathbb{N}$ also nur der Fall III. vorkommen.

(c) Falls für $k \in \mathbb{N}$ der Fall III.2 zutrifft, hat man die Aufgabe $A(f-v_k,\{\Theta\},\mathbb{R})$ näherungsweise zu lösen. Man hat also einen Punkt $x \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, so daß

$$|l_x(f-v_k)| = r_k > d(f-v_k,\Theta) - \eta_k$$

ist. Es ist $w_k = \Theta$.

Der auf S. 49 angeschnittene Fall der Approximation durch Elemente aus $\{\Theta\}$ tritt hier also regelmäßig auf. Es kommen nur Referenzen der Ordnungen n und 0 vor.

Das Remez-Verfahren sieht einfacher als das Töpfer-Verfahren aus. Die Haarsche Bedingung (H) bewirkt außerdem, daß die Konvergenz des Remez-Verfahrens stärker als die des Töpfer-Verfahrens ist. Der Konvergenzbeweis gelingt viel leichter.

Als Vorbereitung für den Konvergenzbeweis folgt

Satz 27: Es sei $\lim_k \eta_k = 0$. Dann gibt es ein $Q \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ und $i \in [0:n]$

$$h_k \cdot 2^{|x_i^k|} \leq \frac{Q}{1+Q} < 1$$

ist.

Beweis: Weil $\varrho(f,V)$ positiv ist, gibt es ein $k_o \in \mathbb{N}$, so daß $h_{k_o} > 0$ ist (Vgl. Satz 20). Weil $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton wächst, gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_o$

$$M_k \subseteq I_{h_{k_o}} .$$

Es seien

$$M := I_{h_{k_o}} \cup \bigcup_0^{k_o-1} M_k$$

und $t := \sup \left\{ |x| \mid x \in M \right\}$. Ferner sei

$$N := \max \left\{ |f(x)| \;\middle|\; x \in |-t,t| \right\} .$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 \leqslant \sum_0^n |\lambda_i^k| \frac{2^{|x_i^k|_{h_k}}}{1 - 2^{|x_i^k|_{h_k}}} = \sum_0^n \lambda_i^k f(x_i^k)$$

$$\leqslant N \cdot \sum_0^n |\lambda_i^k| = N ,$$

weil M_k in M enthalten ist. Es sei

$$s := \inf \left\{ |\lambda_i^k| \;\middle|\; i \in [0:n] \wedge k \in \mathbb{N} \right\} .$$

Wie bei LAURENT [3] S. 200 sieht man ein, daß s positiv ist. Damit erhält man für $k \in N$ und $j \in [0:n]$

$$\frac{2^{|x_j^k|_{h_k}}}{1 - 2^{|x_j^k|_{h_k}}} \leqslant \sum_0^n \frac{2^{|x_i^k|_{h_k}}}{1 - 2^{|x_i^k|_{h_k}}}$$

$$\leqslant \frac{1}{s} \sum_0^n |\lambda_i^k| \frac{2^{|x_i^k|_{h_k}}}{1 - 2^{|x_i^k|_{h_k}}}$$

$$\leqslant \frac{N}{s} .$$

Mit $Q := \frac{N}{s}$ folgt für $k \in \mathbb{N}$ und $i \in [0:n]$

$$2^{|x_i^k|_{h_k}} \leq \frac{Q}{1+Q} < 1 .$$

q.e.d.

Satz 28: V erfülle die Haarsche Bedingung (H) und es gelte

$$\lim_k \eta_k = 0.$$

Dann ist $h^* = \varrho(f,V)$ und $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen die Lösung von $A(f,V,\mathbb{R})$.

Beweis: Ist $k \in \mathbb{N}$ und trifft der Fall III.2 zu, so gilt

$$(*) \qquad \sum_1^{n+1} |\lambda_i^{k+1}| \frac{2^{|x_i^{k+1}|_{h_{k+1}}}}{1 - 2^{|x_i^{k+1}|_{h_{k+1}}}}$$

$$= \sum_1^{n+1} |\lambda_i^{k+1}| \frac{2^{|x_i^{k+1}|_{h_k}}}{1 - 2^{|x_i^{k+1}|_{h_k}}}$$

$$+ |\lambda_{i_k}^{k+1}| \cdot \left[\frac{2^{|x_{i_k}^{k+1}|_{r_k}}}{1 - 2^{|x_{i_k}^{k+1}|_{r_k}}} - \frac{2^{|x_{i_k}^{k+1}|_{h_k}}}{1 - 2^{|x_{i_k}^{k+1}|_{h_k}}} \right] .$$

Dabei ist $x^k_{i_k} \in M_k$ der Punkt, der gegen $E_k = \left\{ x^{k+1}_{i_k} \right\}$ ausgewechselt wird. In allen anderen Fällen gilt $h_{k+1} = h_k$.

(1) Der Fall III.2b) trifft nur für endlich viele k zu. Dann gilt für ein $k_o \in \mathbb{N}$

$$k \in \mathbb{N} \wedge k \geq k_o \Longrightarrow h_{k+1} = h_k \wedge v_{k+1} = v_k .$$

Für $k \geq k_o$ gilt

$$\varrho(f,V) \geq h_k \geq d(f,v_k) - \eta_k \geq \varrho(f,V) - \eta_k$$

(III.1) oder

$$\varrho(f,V) \geq h_k \geq r_k - \eta_k \geq d(f,v_k) - 2\cdot\eta_k$$

$$\geq \varrho(f,V) - 2\cdot\eta_k$$

(III.2a)). Weil $\lim_k \eta_k = 0$ ist, folgt für $k \geq k_o$ $h_k = \varrho(f,V)$ und damit $h^* = \varrho(f,V)$. Außerdem folgt, daß $\lim_k d(f,v_k) = \varrho(f,V)$ ist. D.h., $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Minimalfolge für f.

(2) Der Fall III.2b) trifft für unendlich viele k zu. Dann gibt es eine streng monoton wachsende Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so daß $\varphi(\mathbb{N})$ die Menge derjenigen k ist, für die der Fall III.2b) zutrifft.

Es sei

$$s := \inf \left\{ |\lambda_{i_k}^k| \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\} .$$

s ist positiv. Der Beweis verläuft wie bei LAURENT [3] auf S. 200.

Wie im Beweis zu Satz 21 folgt aus (*) mit Q statt K die Abschätzung

$$\begin{aligned} & 2^t \cdot (1+Q)^2 \cdot (h_{\varphi(k)+1} - h_{\varphi(k)}) \\ & \geq |\lambda_{i\,\varphi(k)}^{\varphi(k)+1}| \, (r_{\varphi(k)} - h_{\varphi(k)}) \\ & \geq s \cdot \left[d(f, v_{\varphi(k)}) - h_{\varphi(k)} - \eta_{\varphi(k)} \right] . \end{aligned}$$

Weil s positiv ist und $(h_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend konvergiert, gilt

$$0 = \lim_k \left[d(f, v_{\varphi(k)}) - h_{\varphi(k)} \right] .$$

Also gilt $\lim_k h_k = \varrho(f,V)$ und $(v_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Minimalfolge für f. Weil für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle j aus dem Intervall $[1: \varphi(k+1) - \varphi(k)]$ $v_{\varphi(k)+j} = v_{\varphi(k+1)}$ gilt, ist auch $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Minimalfolge für f.

(3) $v_o \in V$ sei die Lösung von $A(f,V,\mathbb{R})$.

Annahme: $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen v_o.

Dann gibt es ein $\varepsilon_o \in \mathbb{R}^+$ und eine Teilfolge $(v_{\psi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$

$$d(v_{\psi(k)}, v_o) \geq \varepsilon_o$$

gilt. Andererseits ist $(v_{\psi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Minimalfolge für f. Weil V approximativ-kompakt ist, enthält $(v_{\psi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(v_{\chi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen v_o konvergiert. Widerspruch!

Also gilt $v_o = \lim_k v_k$. q.e.d.

Bemerkung: Sei $k \in \mathbb{N}$. Aus der Abschätzung auf S. 76 folgen mit

$$C := 2^t \cdot (1+Q)^2 \frac{1}{s}$$

die Ungleichungen

$$\varrho(f,V) - h_{\varphi(k)+1} \leq \frac{C-1}{C} \left(\varrho(f,V) - h_{\varphi(k)} \right) + \frac{1}{C} \eta_{\varphi(k)}$$

und

$$d(f, v_{\varphi(k)}) - h_{\varphi(k)} \leq C \cdot (h_{\varphi(k)+1} - h_{\varphi(k)}) + \eta_{\varphi(k)} .$$

Wenn $\lim_k \eta_k = 0$ ist und für $k \in \mathbb{N}$ $\eta_{\varphi(k+1)} \leq \eta_{\varphi(k)} \leq d(f, v_{\varphi(k)}) - h_{\varphi(k)}$ ist, folgt weiter

$$
\begin{aligned}
& d(f, v_{\varphi(k+1)}) - h_{\varphi(k+1)} \\
& \leq C \cdot (\varrho(f,V) - h_{\varphi(k+1)}) + \eta_{\varphi(k+1)} \\
& = C \cdot (\varrho(f,V) - h_{\varphi(k)+1}) + \eta_{\varphi(k+1)} \\
& \leq (C-1)(\varrho(f,V) - h_{\varphi(k)}) + \eta_{\varphi(k+1)} + \eta_{\varphi(k)} \\
& \leq (C-1)(d(f, v_{\varphi(k)}) - h_{\varphi(k)}) + 2\eta_{\varphi(k)} \\
& \leq (C+1)(d(f, v_{\varphi(k)}) - h_{\varphi(k)})
\end{aligned}
$$

und daß die Folge der Breiten der Einschließungen von $\varrho(f,V)$, nämlich $(d(f,v_k) - h_k)_{k \in \mathbb{N}}$, von erster Ordnung gegen 0 konvergiert.

IV. Das zweite Verfahren von Remez

Der n-dimensionale Vektorraum V erfülle weiterhin die Haarsche Bedingung (H), und es sei $f \in X \setminus V$. Das oben behandelte Remez-Verfahren besteht aus der Konstruktion einer Referenzenfolge $(M_k, V)_{k \in \mathbb{N}}$. Dabei ist $M_{k+1} = M_k$ oder M_{k+1} wird aus M_k durch Weglassen eines Punktes und Hinzufügen eines neuen Punktes gewonnen.

Auch mit dem zweiten Remez-Verfahren konstruiert man eine Referenzenfolge $(M_k, V)_{k \in \mathbb{N}}$. Hat man M_k berechnet, so bestimmt man n+1 neue Punkte y_i. Weil V die Haarsche Bedingung erfüllt, ist $\left(\left\{y_i \mid i \in [1:n+1]\right\}, V\right)$ eine Referenz. Unter gewissen Bedingungen setzt man $M_{k+1} := \left\{y_i \mid i \in [1:n+1]\right\}$. M_k wird also weggelassen; man tauscht alle Punkte gleichzeitig aus.

Es stellt sich die Frage, ob das zweite Verfahren besser als das erste konvergiert. Im Falle der Tschebyscheff-Approximation in $\mathcal{C}_2[a,b]$ hat VEIDINGER [10] bewiesen:

Das zweite Verfahren von Remez konvergiert quadratisch.

Dazu folgende

Def. 10: $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge reeller Zahlen, die gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Es sei $p \in \mathbb{N}$.

$(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert von p-ter Ordnung gegen a, wenn es ein $A \in \mathbb{R}^+$ gibt, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$

$$|a_{k+1} - a| \leq A \cdot |a_k - a|^p$$

gilt.

Die Bemerkung auf S. 77 zeigt, daß die Folge der Einschließungen von $\varrho(f,V)$, $(d(f,v_k) - h_k)_{k \in \mathbb{N}}$, von erster Ordnung (oder linear) gegen 0 konvergiert, wenn $\lim_k \eta_k = 0$ ist und für $k \in \mathbb{N}$ $\eta_{k+1} \leq \eta_k \leq d(f,v_k) - h_k$ gilt.

12. Der simultane Punkteaustausch

(M,V) sei eine Referenz. Weil V die Haarsche Bedingung (H) erfüllt, hat (M,V) die Ordnung n. Es sei $M = \{ x_i \mid i \in [0:n] \}$ mit $x_{i-1} < x_i$ für $i \in [1:n]$. $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ seien charakteristische Zahlen von (M,V). $h \in \mathbb{R}_0^+$ sei die Referenzabweichung und $v \in V$ die nivellierte Referenzfunktion von (M,V,f). (Weil $V_{n-n} = \{\theta\}$ ist, ist v die einzige nivellierte Referenzfunktion von (M,V,f).) h und v genügen dem Gleichungssystem

$$0 \leq \sum_0^n \lambda_i f(x_i) = \sum_0^n |\lambda_i| \frac{2^{|x_i|} h}{1 - 2^{|x_i|} h}$$

und

$$1_{x_i}(f-v) = h \cdot \operatorname{sign}(\lambda_i) \qquad \text{für } i \in [0:n] .$$

Satz 29: Es gibt ein $z \in \{-1,1\}$, so daß für $i \in [0:n]$ $\operatorname{sign}(\lambda_i) = z \cdot (-1)^i$ ist.

Beweis: Wie beim Beweis der Notwendigkeit des Alternantenkriteriums (Satz 25) schließt man, daß die Behauptung wahr ist. Dabei ist E durch M zu ersetzen. Die zusammenhängende Menge, auf der V die Haarsche Bedingung erfüllt, ist $\mathbb{R}$.

q.e.d.

Die Referenz (M,V) liefert die Einschließung

$$h \leq \varrho(f,V) \leq d(f,v) \ .$$

Wenn $h = d(f,v)$ ist, ist v eine Minimallösung an f und (M,V) ist die nach Satz 25 garantierte Alternante von f-v.

Es sei nun $h < d(f,v)$. Wegen Satz 29 gibt es zu jedem $i \in [1:n]$ in (x_{i-1},x_i) eine Nullstelle z_i von f-v. Es seien

$$P_o := (-\infty, z_1) \ ,$$

$$P_i := (z_i, z_{i+1}) \qquad \text{für } i \in [1:n-1] \text{ und}$$

$$P_n := (z_n, \infty) \ .$$

Zu $i \in [0:n]$ gibt es ein $y_i \in P_i$, so daß

$$\operatorname{sign}(\lambda_i) \cdot l_{y_i}(f-v) = \max \left\{ \operatorname{sign}(\lambda_i) \cdot l_y(f-v) \mid y \in P_i \right\}$$

ist. Es sei $\hat{M} := \left\{ y_i \mid i \in [0:n] \right\}$. $(\hat{M},V)$ ist eine Referenz. $\hat{\lambda}_o, \ldots, \hat{\lambda}_n$ seien charakteristische Zahlen von $(\hat{M},V)$.

$\hat{h} \in \mathbb{R}_*^+$ sei die Referenzabweichung und $\hat{v} \in V$ die nivellierte Referenzfunktion von $(\hat{M},V,f)$. D.h., $\hat{h}$ und $\hat{v}$ genügen den Gleichungen

$$0 \leq \sum_0^n \hat{\lambda}_i f(y_i) = \sum_0^n |\hat{\lambda}_i| \frac{2^{|y_i|_{\hat{h}}}}{1 - 2^{|y_i|_{\hat{h}}}}$$

und $l_{y_i}(f-\hat{v}) = \hat{h} \cdot \operatorname{sign}(\hat{\lambda}_i)$ für $i \in [0:n]$.

Es sei $I := \left\{ i \in [0:n] \;\middle|\; (f-v)(y_i) \neq 0 \right\}$.

Satz 30: (a) Wenn $i \in I$ ist, gilt

$$\operatorname{sign} \cdot l_{y_i}(f-v) = \operatorname{sign}(\hat{\lambda}_i) .$$

(b) Wenn h positiv ist, ist v eine Referenzfunktion von $(\hat{M},V,f)$.

Beweis: (a) Nach Definition der P_i ist $x_i \in P_i$ für $i \in [0:n]$, und es gilt deshalb

$$\operatorname{sign}(\lambda_i) \cdot l_{y_i}(f-v) \geq \operatorname{sign}(\lambda_i) \cdot l_{x_i}(f-v) = h > 0 .$$

Für $i \in I$ gilt also $\operatorname{sign} \cdot l_{y_i}(f-v) = \operatorname{sign}(\lambda_i)$. Nach Satz 29 gibt es ein $z \in \{-1,1\}$, so daß für $i \in [0:n]$ $\operatorname{sign}(\lambda_i) = z(-1)^i$ ist und ein $\hat{z} \in \{-1,1\}$, so daß für $i \in [0:n]$ $\operatorname{sign}(\hat{\lambda}_i) = \hat{z}(-1)^i$ ist. Für $i \in I$ folgt somit

$$\operatorname{sign}\cdot 1_{y_i}(f-v) = z\cdot(-1)^i = z\hat{z}\cdot\operatorname{sign}(\hat{\lambda}_i) \ .$$

Wenn I leer ist, ist die Behauptung wahr. Ist $I \neq \emptyset$, dann gilt

$$0 \leqslant \sum_0^n \hat{\lambda}_i f(y_i) = \sum_{i\in I} \hat{\lambda}_i (f-v)(y_i)$$

$$= \sum_{i\in I} z\hat{z}\cdot\operatorname{sign}(\hat{\lambda}_i)\cdot\hat{\lambda}_i |f-v|(y_i)$$

$$= z\hat{z} \sum_{i\in I} |\hat{\lambda}_i|\cdot|f-v|(y_i) \ .$$

Wenn I nicht leer ist, ist $\sum_{i\in I} |\hat{\lambda}_i|\cdot|f-v|(y_i) > 0$ und deshalb $z = \hat{z}$. Also gilt auch in diesem Fall

$$i \in I \implies \operatorname{sign}\cdot 1_{y_i}(f-v) = \operatorname{sign}(\hat{\lambda}_i) \ .$$

(b) Wenn h positiv ist, gilt für $i \in [0:n]$

$$\operatorname{sign}(\lambda_i)\cdot 1_{y_i}(f-v) \geqslant h > 0 \ .$$

Also ist dann $I = [0:n]$. Aus Teil (a) folgt, daß v eine Referenzfunktion von $(\hat{M},V,f)$ ist. q.e.d.

Satz 31: Es ist $\hat{h} \geqslant h$.

Beweis: Wenn $h = 0$ ist, ist $\hat{h} \geqslant h$, weil $\hat{h} \in \mathbb{R}_0^+$ ist.

Es sei $h > 0$. Aus Satz 29 und dem Beweis zu Satz 30 folgt dann

$$\sum_0^n |\hat{\lambda}_i| \frac{2^{|y_i|\hat{h}}}{1 - 2^{|y_i|\hat{h}}} = \sum_0^n \hat{\lambda}_i f(y_i)$$

$$= \sum_0^n \hat{\lambda}_i (f-v)(y_i)$$

$$= \sum_0^n |\hat{\lambda}_i| \frac{2^{|y_i|h}}{1 - 2^{|y_i|h}}$$

$$+ \sum_0^n |\hat{\lambda}_i| \cdot \left[|f-v|(y_i) - \frac{2^{|y_i|h}}{1 - 2^{|y_i|h}} \right] .$$

(Weil $|l_{y_i}(f-v)| \geq |l_{x_i}(f-v)| = h$ ist, ist für $i \in [0:n]$ $2^{|y_i|h} < 1$.)

Für $i \in [0:n]$ gilt

$$|f-v|(y_i) \geq \frac{2^{|y_i|h}}{1 - 2^{|y_i|h}} \iff |l_{y_i}(f-v)| \geq h .$$

Also folgt

$$\sum_0^n |\hat{\lambda}_i| \frac{2^{|y_i|\hat{h}}}{1 - 2^{|y_i|\hat{h}}} \geq \sum_0^n |\hat{\lambda}_i| \frac{2^{|y_i|h}}{1 - 2^{|y_i|h}}$$

und damit $\hat{h} \geq h$. q.e.d.

Die obige Auswahlregel für die Punkte y_i garantiert nicht, daß $\hat{h} > h$ ist. Insbesondere könnte es sein, daß $\hat{M} = M$ ist, obwohl $h < d(f,v)$ ist. Es gilt jedoch

Satz 32: Wenn $\hat{M} \cap A(f-v) \neq \emptyset$ ist, ist $\hat{h} > h$.

Beweis: $\hat{M} \cap A(f-v)$ sei nicht leer. Weil $\varrho(f,V)$ positiv ist und $\varrho(f,V) \leq d(f,v)$ ist, ist dann $I \neq \emptyset$.

Wie auf S. 84 folgt

$$\sum_0^n |\hat{\lambda}_i| \frac{2^{|y_i|\hat{h}}}{1 - 2^{|y_i|\hat{h}}} = \sum_0^n |\hat{\lambda}_i| \frac{2^{|y_i|h}}{1 - 2^{|y_i|h}}$$

$$+ \sum_{i \in I} |\hat{\lambda}_i| \cdot \left[|f-v|(y_i) - \frac{2^{|y_i|h}}{1 - 2^{|y_i|h}} \right].$$

(I kann nur dann von [0:n] verschieden sein, wenn $h = 0$ ist!) Für ein $i_o \in I$ ist nun

$$|f-v|(y_{i_o}) > \frac{2^{|y_{i_o}|h}}{1 - 2^{|y_{i_o}|h}}.$$

Deshalb folgt $\hat{h} > h$. q.e.d.

Weil $\hat{h}$ nicht immer größer als h sein muß, muß man, wenn man eine Vergrößerung der Referenzabweichung erzielen will, zwei Fälle unterscheiden.

Fall 1: $\hat{M} \cap A(f-v) \neq \emptyset$. Dann sei $\tilde{M} := \hat{M}$.

Fall 2: $\hat{M} \cap A(f-v) = \emptyset$. Es sei $x \in A(f-v)$. Aus den Referenzen $(\hat{M},V)$ und $(E,\{\theta\})$ mit $E = \{x\}$ gewinnt man durch einen gewöhnlichen Punkteaustausch eine neue Referenz $(\tilde{M},V)$. $\tilde{M}$ besteht aus n+1 Punkten.

Weil $x \in A(f-v)$ und $h < d(f,v)$ ist, ist die Referenzabweichung $\tilde{h}$ von $(\tilde{M},V,f)$ größer als h.

Def. 11: Die Methode, mit der die Referenz $(\tilde{M},V)$ aus (M,V) konstruiert wird, heißt ein simultaner Austauschschritt.

13. Das zweite Remez-Verfahren

Der im 12. Abschnitt beschriebene simultane Austauschschritt wird als Baustein für ein Iterationsverfahren genommen.

Dazu erfülle der n-dimensionale lineare Teilraum V von X die

Haarsche Bedingung (H) und f sei eine Funktion aus $X \setminus V$.

(A) Man bestimmt eine Referenz (M_o,V). Aus den in Abschnitt 8 dargelegten Gründen sollte man versuchen, M_o in $I_{\varrho}(f,V)$ zu wählen. (M_o,V) hat die Ordnung n.

(B) Sei $k \in \mathbb{N}$. (M_k,V) sei eine Referenz. (M_k,V) hat die Ordnung n.

(C) $h_k \in \mathbb{R}_o^+$ sei die Referenzabweichung und $v_k \in V$ die (eindeutig bestimmte) nivellierte Referenzfunktion von (M_k,V,f). η_k sei eine positive reelle Zahl.

1. $h_k \geq d(f,v_k) - \eta_k$. Es sei $M_{k+1} := M_k$.

2. $h_k < d(f,v_k) - \eta_k$. Es seien $\lambda_o^k,\ldots,\lambda_n^k$ charakteristische Zahlen von (M_k,V). $P_o^k,\ldots,P_n^k$ seien die nach Abschnitt 12 aus M_k und $f-v_k$ konstruierten Intervalle. Man bestimmt nun $y_i^k \in P_i^k$ für $i \in [0:n]$, so daß

$$\operatorname{sign}(\lambda_i^k)\cdot 1_{y_i^k}(f-v_k) > \sup\left\{\operatorname{sign}(\lambda_i^k)\cdot 1_y(f-v_k) \mid y \in P_i^k\right\} - \eta_k$$

und

$$\operatorname{sign}(\lambda_i^k)\cdot 1_{y_i^k}(f-v_k) \geq \left|1_{x_i^k}(f-v_k)\right|$$

ist.

Man setzt $\hat{M}_k := \left\{ y_i^k \mid i \in [0:n] \right\}$. $\hat{h}_k$ sei die Referenzabweichung von $(\hat{M}_k, V, f)$.

2.a) Wenn es ein $j_k \in [0:n]$ gibt, so daß

$$\left| 1_{y_{j_k}^k}(f-v_k) \right| \geq d(f,v_k) - \eta_k$$

ist, dann sei $M_{k+1} := M_k$.

2.b) Gibt es in $[0:n]$ kein derartiges j_k, so bestimmt man ein $x^k \in \mathbb{R}$, so daß

$$\left| 1_{x^k}(f-v_k) \right| \geq d(f,v_k) - \eta_k$$

ist. Auf $(\hat{M}_k, V)$ und $(E_k, \{\Theta\})$ mit $E_k := \left\{ x^k \right\}$ wendet man das einfache Austauschverfahren an. Das Ergebnis sei (M_{k+1}, V).

Das zweite Verfahren von Remez liefert wie das erste eine Referenzenfolge $(M_k, V)_{k \in \mathbb{N}}$, eine Funktionenfolge $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in V und eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so daß v_k die eindeutig bestimmte nivellierte Referenzfunktion und h_k die Referenzabweichung von (M_k, V, f) ist. Für $k \in \mathbb{N}$ hat man daher die Einschließung

$$h_k \leq \varrho(f,V) \leq d(f,v_k) .$$

Satz 33: Die Folge $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

Beweis: Sei $k \in N$. Trifft der erste Fall zu, so ist $h_{k+1} = h_k$.

2.a): Man hat die Abschätzung

$$0 \leq h_k < d(f,v_k) - \eta_k \leq \left| 1_{y_{j_k}^k} (f-v_k) \right| .$$

Also ist $j_k \in I_k := \left\{ i \in [0:n] \;\middle|\; 1_{y_i^k}(f-v_k) \neq 0 \right\}$. $\hat{\lambda}_0^k, \ldots, \hat{\lambda}_n^k$ seien charakteristische Zahlen von $(\hat{M}_k, V)$. Wie im Beweis von Satz 32 gilt

$$\sum_0^n |\hat{\lambda}_i^k| \frac{2^{|y_i^k|}\hat{h}_k}{1 - 2^{|y_i^k|}\hat{h}_k} = \sum_0^n |\hat{\lambda}_i^k| \frac{2^{|y_i^k|}h_k}{1 - 2^{|y_i^k|}h_k}$$

$$+ \sum_{i \in I_k} |\hat{\lambda}_i^k| \cdot \left[|f-v_k|(y_i^k) - \frac{2^{|y_i^k|}h_k}{1 - 2^{|y_i^k|}h_k} \right]$$

$$\geq \sum_0^n |\hat{\lambda}_i^k| \frac{2^{|y_i^k|}h_k}{1 - 2^{|y_i^k|}h_k}$$

$$+ |\hat{\lambda}_{j_k}^k| \cdot \left[|f-v_k|(y_{j_k}^k) - \frac{2^{|y_{j_k}^k|}h_k}{1 - 2^{|y_{j_k}^k|}h_k} \right] .$$

Weiter gilt

$$\sum_0^n |\hat{\lambda}_i^k| \frac{2^{|y_i^k|\hat{h}_k}}{1 - 2^{|y_i^k|\hat{h}_k}} > \sum_0^n |\hat{\lambda}_i^k| \frac{2^{|y_i^k| h_k}}{1 - 2^{|y_i^k| h_k}}$$

$$+ |\hat{\lambda}_{j_k}^k| \cdot \left[\frac{2^{|y_{j_k}^k|(d(f,v_k) - \eta_k)}}{1 - 2^{|y_{j_k}^k|(d(f,v_k) - \eta_k)}} - \frac{2^{|y_{j_k}^k| h_k}}{1 - 2^{|y_{j_k}^k| h_k}} \right] .$$

Weil $h_k < d(f,v_k) - \eta_k$ ist, hat man

$$h_{k+1} = \hat{h}_k > h_k .$$

2.b): Hier gilt für $i \in [0:n]$

$$\left| 1_{y_i^k}(f - v_k) \right| < d(f,v_k) - \eta_k$$

und daher

$$|f - v_k|(y_i^k) < \frac{2^{|y_i^k|(d(f,v_k) - \eta_k)}}{1 - 2^{|y_i^k|(d(f,v_k) - \eta_k)}} .$$

Daraus folgt nun

$$\sum_{0}^{n} |\hat{\lambda}_i^k| \frac{2^{|y_i^k|}\hat{h}_k}{1 - 2^{|y_i^k|}\hat{h}_k} = \sum_{0}^{n} |\hat{\lambda}_i^k| \cdot |f-v_k|(y_i^k)$$

$$< \sum_{0}^{n} |\hat{\lambda}_i^k| \frac{2^{|y_i^k|}(d(f,v_k) - \eta_k)}{1 - 2^{|y_i^k|}(d(f,v_k) - \eta_k)} .$$

Dies gilt genau dann, wenn $\hat{h}_k < d(f,v_k) - \eta_k$ ist. Also hat man vor dem einfachen Punkteaustausch

$$\hat{h}_k < |l_{x^k}(f-v_k)| .$$

Aus Satz 16 folgt nun direkt

$$h_{k+1} > \hat{h}_k > h_k . \qquad \text{q.e.d.}$$

Satz 34: Es sei $\lim_k \eta_k = 0$. Ist $k \in \mathbb{N}$ und $h_k < \varrho(f,V)$, so gibt es ein $p \in \mathbb{N}_0$, so daß

$$h_k < h_{k+p+1}$$

ist.

Der Beweis verläuft im Prinzip nicht anders als der von Satz 20.

Satz 35: Es sei $\lim_k \eta_k = 0$. Dann gibt es ein $Q \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ und $i \in [0:n]$

$$h_k \cdot 2^{|x_i^k|} \leq \frac{Q}{1+Q} < 1$$

ist.

Satz 35 wird wie Satz 27 bewiesen.

Weil die Folge $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton wächst und durch $\varphi(f,V)$ beschränkt ist, gibt es ein $h^* \in \mathbb{R}$, so daß $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen h^* konvergiert. Es gilt

Satz 36: V erfülle die Haarsche Bedingung (H) und es gelte

$$\lim_k \eta_k = 0.$$

Dann ist $h^* = \varphi(f,V)$ und $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen die Lösung von $A(f,V,\mathbb{R})$.

Beweis: Wie bei Satz 28, weil wegen der Haarschen Bedingung auch hier

$$s := \inf \left\{ |\lambda_i^k| \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \wedge i \in [0:n] \right\}$$

positiv ist, und $A(f,V,\mathbb{R})$ genau eine Lösung hat.

q.e.d.

14. Zur Konvergenzgeschwindigkeit des zweiten Remez-Verfahrens

Das Ziel dieses Abschnitts ist zu zeigen, daß das zweite Remez-Verfahren unter gewissen Voraussetzungen quadratisch konvergiert. Weil diese Voraussetzungen im wesentlichen Differenzierbarkeitseigenschaften von f und den Funktionen aus V sind, wird statt der Gewichtsfunktion $2^{-|x|}$ die auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion 2^{-x^2} genommen.

Alles, was bisher bewiesen wurde, gilt auch, wenn man $2^{-|x|}$ durch 2^{-x^2} ersetzt. Die Aussagen dieses Abschnitts gelten jedoch nur für auf $\mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Gewichtsfunktionen, die außerdem die Eigenschaften (P) und (∞) haben.

Aus Abschnitt 13 schließt man insbesondere, daß es auch zu der neuen Gewichtsfunktion eine Zahl $C_1 \in \mathbb{R}^+$ gibt, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$

$$d(f,v_k) - h_k \leq C_1 \cdot (h_{k+1} - h_k) + \eta_k$$

gilt. Aus dieser Ungleichung folgt, daß das zweite Verfahren von Remez linear konvergiert, d.h., daß die Folge $(d(f,v_k) - h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von erster Ordnung gegen 0 konvergiert, wenn für $k \in \mathbb{N}$ $\eta_{k+1} \leq \eta_k \leq d(f,v_k) - h_k$ gilt.

Um den Hauptsatz dieses Abschnitts, Satz 49, beweisen zu kön-

nen, wird eine Reihe von vorbereitenden Sätzen vorausgeschickt.

Y sei die Menge der Funktionen aus X, die auf $\mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar sind. Y ist ein linearer Teilraum von X.

Es sei $u \in Y$. Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$\phi_u(x) := 1_x(u) .$$

Satz 37: (a) ϕ_u ist auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es gilt

$$\phi_u'(x) = -2x(\log 2)\cdot\phi_u(x) + 2^{-x^2}\frac{u'(x)}{(1 + |u(x)|)^2} .$$

(b) ϕ_u ist auf $\mathbb{R} \setminus \{ x \in \mathbb{R} \mid u(x) = 0 \}$ zweimal stetig differenzierbar. Dort gilt

$$\phi_u''(x) = (4x^2(\log 2)^2 - \log 4)\cdot\phi_u(x)$$

$$- 4x(\log 2)\cdot 2^{-x^2}\frac{u'(x)}{(1 + |u(x)|)^2}$$

$$+ 2^{-x^2}\cdot\frac{u''(x)(1 + |u(x)|) - 2\,\mathrm{sign}(u(x))\cdot(u'(x))^2}{(1 + |u(x)|)^3} .$$

Beweis: Man erhält die Ableitungen von ϕ_u durch leichte Rechnungen. q.e.d.

V sei im folgenden stets ein n-dimensionaler linearer Teilraum von Y ($n \in \mathbb{N}_0$), der die Haarsche Bedingung (H) erfüllt. Außerdem sei $f \in X \setminus V$.

Zur Lösung der Approximationsaufgabe $A(f,V,\mathbb{R})$ wird das zweite Remez-Verfahren in einer Form verwendet, die der speziellen Situation angepaßt ist.

Unter (C) gelte:

1. Fall: $h_k \geq d(f,v_k) - \eta_k$ und für $i \in [0:n]$ gilt $|\phi'_{f-v_k}(x_i^k)| \leq \eta_k$. Dann wird $M_{k+1} := M_k$ gesetzt.

2. Fall: $h_k < d(f,v_k) - \eta_k$ oder es gibt ein $i_k \in [0:n]$, so daß $|\phi'_{f-v_k}(x_{i_k}^k)| > \eta_k$ ist. Dann wird für $i \in [0:n]$ $y_i^k \in P_i^k$ bestimmt, so daß

$$\operatorname{sign}(\lambda_i^k) \cdot l_{y_i^k}(f-v_k) \geq \sup\left\{ \operatorname{sign}(\lambda_i^k) \cdot l_y(f-v_k) \mid y \in P_i^k \right\} - \eta_k$$

und $|l_{y_i^k}(f-v_k)| \geq |l_{x_i^k}(f-v_k)|$ ist. Zusätzlich gelte für $i \in [0:n]$

$$|\phi'_{f-v_k}(y_i^k)| \leq \eta_k .$$

Fall 2.a): Wie früher.

Fall 2.b): $x^k \in \mathbb{R}$ wird so bestimmt, daß

$$|l_{x^k}(f-v_k)| \geq d(f,v_k) - \eta_k$$

ist und außerdem

$$|\phi'_{f-v_k}(x^k)| \leq \eta_k$$

gilt.

Die Punkte y_i^k mit $i \in [0:n]$ bzw. x^k sind Näherungen für lokale Extrempunkte der Funktion ϕ_{f-v_k}. Die Zusatzforderung bedeutet also, daß die Ableitung von ϕ_{f-v_k} an den Stellen y_i^k bzw. x^k näherungsweise verschwinden soll.

Fürs folgende sei vorausgesetzt, daß $\lim_k \eta_k = 0$ ist.

$t \in \mathbb{R}^+$ sei wie im Beweis zu Satz 34 definiert (siehe auch Beweis zu Satz 20). Dann gilt für $k \in \mathbb{N}$ $M_k \subseteq [-t,t]$.

Für $g \in X$ sei im folgenden

$$\|g\| := \max \left\{ |g(x)| \;\middle|\; x \in [-t,t] \right\} .$$

$\|.\|: X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Halbnorm. Weil V die Haarsche Bedingung erfüllt und t positiv ist, ist $\|.\|_V$ eine Norm.

Satz 38: Es gibt eine Zahl $C_2 \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $v \in V$

$$\|v''\| \leq C_2 \cdot \|v\|$$

ist.

Beweis: W sei der lineare Teilraum von X, der von V und $V' := \{ v' \mid v \in V \}$ erzeugt wird. Durch

$$Dw := w'$$

ist eine lineare Abbildung $D:W \to X$ erklärt. Weil W endlichdimensional ist, existiert

$$N_D := \sup \{ \|Dw\| \mid w \in W \wedge \|w\| \leq 1 \} .$$

Für $w \in W$ gilt daher

$$\|w'\| = \|Dw\| \leq N_D \cdot \|w\| .$$

Weil $D(V) \subseteq W$ ist, folgt

$$\|v''\| = \|D^2 v\| \leq N_D{}^2 \cdot \|v\|$$

für $v \in V$. Mit $C_2 := N_D{}^2$ folgt die Behauptung des Satzes.

q.e.d.

Das zweite Remez-Verfahren liefert aus einer Anfangsreferenz (M_o,V) die Referenzenfolge $(M_k,V)_{k\in\mathbb{N}}$. Für $k\in N$ seien $h_k \in \mathbb{R}^+_*$ die Referenzabweichung und $v_k \in V$ die nivellierte Referenzfunktion von (M_k,V,f). Ferner seien

$$e_k := f-v_k$$

und

$$\Delta_k := \phi_{e_k} = \phi_{f-v_k}$$

für $k\in\mathbb{N}$. Δ_k ist auf $G_k := \{ x \in \mathbb{R} \mid e_k(x) \neq 0 \}$ zweimal stetig differenzierbar. Ist h_k positiv, so ist M_k in G_k enthalten. Weil $\varrho(f,V)$ positiv ist und vorausgesetzt ist, daß $\lim_k \eta_k = 0$ ist, kann man nach Satz 34 oBdA annehmen, daß für alle $k\in\mathbb{N}$ $M_k \subseteq G_k$ ist.

$v\in V$ sei die Minimallösung an f. Es seien $e := f-v$ und $\Delta := \phi_e$. Weil $\lim_k \eta_k = 0$ ist, konvergiert die Folge $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im Sinne von d gegen e. Daraus folgt $\lim_k \|e_k-e\| = 0$, und es gibt eine Zahl $C_3 \in \mathbb{R}^+$, so daß $\|e\| \leq C_3$ und für alle $k\in\mathbb{N}$ $\|e_k\| \leq C_3$ ist.

Satz 39: Es gilt

$$\lim_k \|e_k' - e'\| = \lim_k \|e_k'' - e''\| = 0 .$$

Beweis: Aus Satz 38 und dessen Beweis folgt, daß

$$\|e_k' - e'\| = \|v_k' - v'\| \leq N_D \cdot \|v_k - v\|$$

$$= N_D \cdot \|e_k - e\|$$

und

$$\|e_k'' - e''\| \leq \ldots \leq C_2 \cdot \|e_k - e\|$$

für $k \in \mathbb{N}$ gilt. Daraus folgt die Behauptung. q.e.d.

Satz 40: Es gilt

$$\lim_k \|\Delta_k - \Delta\| = 0 .$$

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$. Für $x \in [-t,t]$ gilt

$$|\Delta_k(x) - \Delta(x)| = |1_x(e_k) - 1_x(e)| .$$

Wie im Beweis zu Satz 3 erhält man für $x \in [-t,t]$

$$|\Delta_k(x) - \Delta(x)| \leq (1 + 2|e(x)|) \cdot d(e_k, e) .$$

Für $x \in [-t,t]$ folgt daraus

$$|\Delta_k(x) - \Delta(x)| \leq (1 + 2C_3) \cdot d(e_k, e)$$

und

$$\| \Delta_k - \Delta \| \leq (1 + 2C_3) \cdot d(e_k, e) \ .$$

Also gilt die Behauptung. q.e.d.

Satz 41: Es gilt

$$\lim_k \| \Delta_k' - \Delta' \| = 0 \ .$$

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$. Nach Satz 37 (a) sind Δ und Δ_k auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $x \in [-t,t]$. Dann gilt

$$|\Delta_k'(x) - \Delta'(x)| \leq 2t(\log 2) \cdot |\Delta_k(x) - \Delta(x)|$$

$$+ \left| \frac{e_k'(x)}{(1 + |e_k(x)|)^2} - \frac{e'(x)}{(1 + |e(x)|)^2} \right|$$

$$\leq 2t(\log 2) \cdot (1 + 2C_3) \cdot d(e_k, e)$$

$$+ \left| e_k'(x) \cdot (1 + |e(x)|)^2 - e'(x) \cdot (1 + |e_k(x)|)^2 \right|$$

$$\leq 2t (\log 2) \cdot (1 + 2C_3) \cdot d(e_k, e)$$

$$+ (1 + |e(x)|)^2 \cdot |e_k'(x) - e'(x)|$$

$$+ |e'(x)| \cdot \left| (1 + |e(x)|)^2 - (1 + |e_k(x)|)^2 \right| .$$

Durch weitere Abschätzung folgt

$$|\Delta_k'(x) - \Delta'(x)| \leq 2t(\log 2)\cdot(1 + 2C_3)\cdot d(e_k,e) + (1 + C_3)^2 N_D \cdot \|e_k - e\| + N_D C_3 \cdot (2 + 2C_3)\cdot |e(x) - e_k(x)| \ .$$

Setzt man

$$C_4 := 2t(\log 2)\cdot(1 + 2C_3) + N_D\cdot(1 + C_3)^2 + 2N_D C_3\cdot(1 + C_3),$$

so erhält man, weil $d(e_k,e) \leq \|e_k - e\|$ ist,

$$|\Delta_k'(x) - \Delta'(x)| \leq C_4\cdot\|e_k - e\| \ .$$

Hieraus folgt nun sofort

$$\|\Delta_k' - \Delta'\| \leq C_4\cdot\|e_k - e\|$$

und damit die Behauptung. q.e.d.

Die Folge $(\Delta_k'')_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht auf $[-t,t]$ gleichmäßig gegen Δ'', weil Δ und Δ_k nicht in allen Punkten von $[-t,t]$ zweimal differenzierbar sind. Es sei

$$G := \left\{ x \in [-t,t] \ \middle| \ |l_x(f-v)| \geq \tfrac{1}{2}\,\varrho(f,V) \right\} \ .$$

G ist eine kompakte Teilmenge von $[-t,t]$. Weil $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $\varrho(f,V)$ konvergiert, gibt es ein $k_1\in\mathbb{N}$, so daß für alle $k\in\mathbb{N}$, $k \geq k_1$ $h_k \geq \frac{3}{4}\varrho(f,V)$ ist. Weil außerdem $\lim_k e_k = e$ ist, gibt es ein $k_2\in\mathbb{N}$, $k_2 \geq k_1$, so daß für alle $k\in\mathbb{N}$, $k \geq k_2$ und alle $x \in \mathbb{R}$

$$-\tfrac{1}{4}\varrho(f,V) \leq |l_x(f-v_k)| - |l_x(f-v)| \leq \tfrac{1}{4}\varrho(f,V)$$

ist. Für $k \geq k_2$ und $i \in [0:n]$ gilt dann

$$|l_{x_i^k}(f-v)| \geq |l_{x_i^k}(f-v_k)| - \tfrac{1}{4}\varrho(f,V)$$

$$= h_k - \tfrac{1}{4}\varrho(f,V) \geq \tfrac{1}{2}\varrho(f,V) .$$

Für $k \geq k_2$ gilt also $M_k \subseteq G$.

Außerdem hat man für $k \geq k_2$ und $x \in G$

$$|l_x(f-v_k)| \geq |l_x(f-v)| - \tfrac{1}{4}\varrho(f,V)$$

$$\geq \tfrac{1}{4}\varrho(f,V) > 0 .$$

Für $k \geq k_2$ und $x \in G$ gilt also $e_k(x) \neq 0$. Damit hat man

Satz 42: Für hinreichend große $k \in \mathbb{N}$ gilt

(i) $M_k \subseteq G$ und

(ii) $x \in G \implies e_k(x) \neq 0$.

OBdA sei angenommen, daß $k_2 = 1$ ist.

Aus Satz 42 (ii) folgt, daß alle Funktionen Δ_k und Δ auf G zweimal stetig differenzierbar sind.

Satz 43: Für $x \in G$ gilt gleichmäßig

$$\lim_k \Delta_k''(x) = \Delta''(x) .$$

Genauer gilt: Es gibt Zahlen $C_5 \in \mathbb{R}^+$ und $k_3 \in \mathbb{N}$, so daß für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_3$ und $x \in G$

$$|\Delta_k''(x) - \Delta''(x)| \leq C_5 \cdot \|e_k - e\|$$

ist.

Beweis: Ähnlich wie im Beweis zu Satz 40 nachrechnen. Dabei ist zu beachten, daß für $x \in G$ und hinreichend große $k \in \mathbb{N}$ $\operatorname{sign}(e(x)) = \operatorname{sign}(e_k(x))$ ist. q.e.d.

Aus Satz 43 folgt, daß es eine Zahl $C_6 \in \mathbb{R}^+$ gibt, so daß für alle $x \in G$ $|\Delta''(x)| \leq C_6$ ist und für alle $k \in \mathbb{N}$ $|\Delta_k''(x)| \leq C_6$ ist.

Weil $A(f-v) \subseteq G$ ist, ist Δ auf $A(f-v)$ zweimal stetig differenzierbar.

Voraussetzung: Für alle $x \in A(f-v)$ gelte $|\Delta''(x)| > 0$.

Es sei $c_1 := \min \left\{ |\Delta''(x)| \mid x \in A(f-v) \right\}$. c_1 ist positiv. Ferner sei

$$U := \left\{ x \in \mathring{G} \mid |\Delta''(x)| > \frac{c_1}{2} \right\} .$$

U ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, die A(f-v) umfaßt und in G liegt. Es gibt deshalb ein $\varepsilon_o \in (0, \frac{1}{2} \varsigma(f,V))$, so daß

$$H := \left\{ x \in [-t,t] \mid |l_x(f-v)| \geq \varsigma(f,V) - \varepsilon_o \right\}$$

in U enthalten ist:

$$A(f-v) \subseteq H \subseteq U \subseteq \mathring{G} \subseteq G \subseteq [-t,t] .$$

So wie Satz 42 für G folgt nun für H

Satz 44: Es gibt ein $k_4 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_4$

(i) $M_k \subseteq H$ und

(ii) $x \in H \implies |\Delta_k''(x)| > \frac{c_1}{2}$

gilt.

Es sei wieder oBdA angenommen, daß $k_4 = 1$ ist.

Ferner sei $b := \max \left\{ |x| \mid x \in H \right\}$. b ist kleiner als t und

positiv.

Satz 45: Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es eine Zahl $j_k \in [0:n]$, so daß

$$d(f,v_k) - h_k \leq \frac{C_6}{2} \left[x_{j_k}^{k+1} - x_{j_k}^{k}\right]^2 + (2b + 1)\cdot\eta_k$$

ist.

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $j_k \in [0:n]$, so daß

$$\left|1_{x_{j_k}^{k+1}}(f-v_k)\right| > d(f,v_k) - \eta_k$$

ist und

$$\left|\Delta_k'(x_{j_k}^{k+1})\right| \leq \eta_k$$

ist. Zwischen $x_{j_k}^{k}$ und $x_{j_k}^{k+1}$ gibt es ein $\xi_{j_k}^{k}$, so daß

$$\Delta_k(x_{j_k}^{k}) = \Delta_k(x_{j_k}^{k+1}) + \Delta_k'(x_{j_k}^{k+1})\cdot\left[x_{j_k}^{k} - x_{j_k}^{k+1}\right] + \frac{\Delta_k''(\xi_{j_k}^{k})}{2}\cdot\left[x_{j_k}^{k} - x_{j_k}^{k+1}\right]^2$$

ist. Dabei ist $\xi_{j_k}^{k} \in H$. Aus der Vorschrift über die Bestimmung von $x_{j_k}^{k+1}$ folgt, daß

$$\Delta_k(x^k_{j_k}) = \operatorname{sign}(\lambda^k_{j_k}) \cdot h_k$$

und

$$\operatorname{sign}(\lambda^k_{j_k}) \cdot \Delta_k(x^{k+1}_{j_k}) = |\Delta_k(x^{k+1}_{j_k})| \geq d(f,v_k) - \eta_k$$

ist. Weil $h_k \in \mathbb{R}^+_o$ ist, folgt

$$d(f,v_k) - h_k - \eta_k \leq |\Delta_k(x^{k+1}_{j_k})| - |\Delta_k(x^k_{j_k})|$$

$$\leq 2b \cdot \eta_k + \frac{C_6}{2} \cdot \left\| x^{k+1}_{j_k} - x^k_{j_k} \right\|^2 .$$

Also erhält man

$$d(f,v_k) - h_k \leq \frac{C_6}{2} \cdot \left\| x^{k+1}_{j_k} - x^k_{j_k} \right\|^2 + (2b + 1) \cdot \eta_k .$$

q.e.d.

Satz 46: Für jedes Paar $(k,i) \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \times [0:n]$ gilt

$$|\Delta'_k(x^k_i)| \leq C_4 \cdot \|e_k - e_{k-1}\| + \eta_{k-1} .$$

Beweis: Es seien $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $i \in [0:n]$. Dann gilt

$$|\Delta'_k(x^k_i)| \leq |\Delta'_k(x^k_i) - \Delta'_{k-1}(x^k_i)| + |\Delta'_{k-1}(x^k_i)|$$

und daraus folgt

$$|\Delta'_k(x_i^k)| \leq |\Delta'_k(x_i^k) - \Delta'_{k-1}(x_i^k)| + \eta_{k-1} .$$

Wie in den Beweisen zu den Sätzen 40 und 41 zeigt man, daß

$$|\Delta'_k(x_i^k) - \Delta'_{k-1}(x_i^k)| \leq C_4 \|e_k - e_{k-1}\|$$

ist. Also folgt nun

$$|\Delta'_k(x_i^k)| \leq C_4 \cdot \|e_k - e_{k-1}\| + \eta_{k-1} .$$

q.e.d.

Satz 47: Es gibt positive reelle Zahlen C_7 und C_8, so daß für alle Paare $(k,i) \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \times [0:n]$

$$|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq C_7 \cdot \|e_k - e_{k-1}\| + C_8 \cdot (\eta_k + \eta_{k-1})$$

gilt.

Beweis: Es seien $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $i \in [0:n]$. Zwischen x_i^{k+1} und x_i^k gibt es ein ζ_i^k, so daß

$$\Delta'_k(x_i^k) = \Delta'_k(x_i^{k+1}) + \Delta''_k(\zeta_i^k) \cdot (x_i^k - x_i^{k+1})$$

ist. ζ_i^k liegt in H. Hieraus folgt nun mit Satz 46

$$\left|\Delta_k'(x_i^{k+1}) + \Delta_k''(\zeta_i^k)\cdot(x_i^k - x_i^{k+1})\right| \leq C_4\cdot\|e_k - e_{k-1}\| + \eta_{k-1}$$

und weiter

$$|\Delta_k''(\zeta_i^k)|\cdot|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq C_4\cdot\|e_k - e_{k-1}\| + \eta_k + \eta_{k-1}\ .$$

Weil $\zeta_i^k \in H$ ist, ist $|\Delta_k''(\zeta_i^k)| > \frac{c_1}{2} > 0$. Mit $C_7 := \frac{2\cdot C_4}{c_1}$ und $C_8 := \frac{2}{c_1}$ folgt so

$$|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq C_7\cdot\|e_k - e_{k-1}\| + C_8\cdot(\eta_k + \eta_{k-1})\ .$$

q.e.d.

Satz 48: Es gibt eine Zahl $C_9 \in \mathbb{R}^+$ und ein $k_5 \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_5$

$$\|e_k - e_{k-1}\| \leq C_9\cdot(d(f,v_{k-1}) - h_{k-1})$$

gilt.

Beweis: $\{w_i \mid i \in [1:n]\}$ sei eine Basis von V.

(a) Sei $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Ferner seien $v_k =: \sum_1^n \alpha_j^k w_j$, $v_{k-1} =: \sum_1^n \alpha_j^{k-1} w_j$ und $\bar{v}_k := v_k - v_{k-1}$ sowie

$\bar{v}_k =: \sum_{1}^{n} \bar{\alpha}_j^k w_j$. $\bar{v}_k$ ist die Lösung des Gleichungssystems

$$\bar{v}_k(x_i^k) = e_{k-1}(x_i^k) - z_k \cdot (-1)^i \cdot \frac{2^{(x_i^k)^2} h_k}{1 - 2^{(x_i^k)^2} h_k}$$

$(i \in [0:n])$ mit $z_k \in \{-1,1\}$. Es seien

$$W_k := \begin{bmatrix} w_1(x_o^k) & \cdots & w_n(x_o^k) \\ \vdots & & \vdots \\ w_1(x_n^k) & \cdots & w_n(x_n^k) \end{bmatrix},$$

$\bar{\alpha}^k := (\bar{\alpha}_1^k, \ldots, \bar{\alpha}_n^k)'$ und $\beta^k \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\beta_i^k := e_{k-1}(x_i^k) - z_k \cdot (-1)^i \cdot \frac{2^{(x_i^k)^2} h_k}{1 - 2^{(x_i^k)^2} h_k}$$

für $i \in [0:n]$. Dann gilt

$$W_k \bar{\alpha}^k = \beta^k .$$

$\|.\|_n$ und $\|.\|_{n+1}$ seien die Maximumnormen auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist

$$\|W_k \bar{\alpha}^k\|_{n+1} = \max \left\{ \left| \frac{2^{(x_i^k)^2} \Delta_{k-1}(x_i^k)}{1 - 2^{(x_i^k)^2} |\Delta_{k-1}(x_i^k)|} - \frac{z_k (-1)^i \cdot 2^{(x_i^k)^2} h_k}{1 - 2^{(x_i^k)^2} h_k} \right| \;\middle|\; i \in [0:n] \right\} .$$

(b) Nach Konstruktion von H gibt es ein $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$, so daß

$$H \subseteq [-b,b] \subseteq I_{\varrho(f,V)+\varepsilon_1}$$

ist. Dann gibt es ein $k_5 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_5$ $d(f,v_{k-1}) < \varrho(f,V) + \varepsilon_1$ ist. Für alle $k \geq k_5$ und $i \in [0:n]$ gilt dann

$$|\Delta_{k-1}(x_i^k)| \leq d(f,v_{k-1}) < \varrho(f,V) + \varepsilon_1 .$$

D.h., für alle $k \geq k_5$ und $i \in [0:n]$ ist

$$2^{(x_i^k)^2} |\Delta_{k-1}(x_i^k)| \leq 2^{b^2} (\varrho(f,V) + \varepsilon_1) < 1 ,$$

weil $x_i^k \in H$ ist.

Es sei nun $k \in N$ und $k \geq k_5$. Für $i \in [0:n]$ gilt

$$z_k(-1)^i \Delta_{k-1}(x_i^k) \geq h_k \geq 0 .$$

Deshalb folgt

$$W_k \tilde{\alpha}^k{}_{n+1} \leq \max \left\{ \frac{2^{(x_i^k)^2}}{1 - 2^{(x_i^k)^2} |\Delta_{k-1}(x_i^k)|^2} \cdot (|\Delta_{k-1}(x_i^k)| - h_k) \;\middle|\; i \in [0:n] \right\}$$

$$\leq \frac{2^{b^2}}{1 - 2^{b^2} (\varrho(f,V) + \varepsilon_1)^2} (d(f,v_{k-1}) - h_{k-1}) .$$

(c) Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_5$ sei

$$s_k := \min \left\{ \|W_k \alpha\|_{n+1} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R}^n \wedge \|\alpha\|_n = 1 \right\} .$$

Weil V die Haarsche Bedingung (H) erfüllt, ist s_k positiv.
Es sei

$$s := \inf \left\{ s_k \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \wedge k \geq k_5 \right\} .$$

Annahme: Es ist $s = 0$.

Dann gibt es eine Folge $(\varphi(k))_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\varphi(k) \geq k_5$ und $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ für $k \in \mathbb{N}$, so daß $s = \lim_k s_{\varphi(k)}$ ist. Außerdem gibt es zu $k \in \mathbb{N}$ ein $\gamma^k \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\gamma^k\|_n = 1$, so daß

$\|W_{\varphi(k)}\,\gamma^k\|_{n+1} = s_{\varphi(k)}$ ist. Weil für alle $k \in \mathbb{N}$ $M_{\varphi(k)} \subseteq H$ und $\|\gamma^k\|_n = 1$ ist, kann man oBdA annehmen, daß Punkte $x_i \in H$, $i \in [0:n]$ mit $x_{i-1} \lessdot x_i$ für $i \in [1:n]$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\gamma\|_n = 1$ existieren, so daß

$$\lim_k |x_i^{\varphi(k)} - x_i| = 0$$

für $i \in [0:n]$ und

$$\lim_k \|\gamma^k - \gamma\|_n = 0$$

gilt. Weil V die Haarsche Bedingung (H) erfüllt, muß für $i \in [1:n]$ $x_{i-1} < x_i$ sein. Es sei

$$W := \begin{pmatrix} w_1(x_0) & \cdots & w_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ w_1(x_n) & \cdots & w_n(x_n) \end{pmatrix} .$$

Dann konvergiert die Folge $(W_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ komponentenweise gegen W. Es gilt

$$\|W\gamma - W_{\varphi(k)}\,\gamma^k\|_{n+1} \leq \|W(\gamma - \gamma^k)\|_{n+1} + \|(W - W_{\varphi(k)})\,\gamma^k\|_{n+1} .$$

Daraus folgt, daß

$$\|w_\gamma\|_{n+1} = \lim_k \|w_{\varphi(k)} \gamma^k\|_{n+1}$$

$$= \lim_k s_{\varphi(k)} = 0$$

ist, obwohl $\|\gamma\|_n = 1$ ist. Widerspruch zur Annahme!

Also ist s positiv.

(d) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $k \geq k_5$. Aus (b) und (c) folgt die Abschätzung

$$\|\tilde{\alpha}^k\|_n \leq \frac{2^{b^2}}{s\left[1 + 2^{b^2}(\varrho(f,V) + \varepsilon_1)\right]^2} (d(f,v_{k-1}) - h_{k-1}) .$$

Ist $u \in V$ und $u = \sum_1^n \alpha_i w_i$, so wird durch

$$\|u\|' := \|\alpha\|_n$$

mit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)'$ eine Norm $\|.\|'$ auf V definiert. $\|.\|$ und $\|.\|'$ sind auf V äquivalent. D.h., es gibt eine Zahl $N \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $u \in V$

$$\|u\| \leq N \cdot \|u\|'$$

ist. Damit folgt nun

$$\|e_k - e_{k-1}\| \leq c_9 \cdot (d(f,v_{k-1}) - h_{k-1}) ,$$

wenn man

$$C_9 := \frac{2^{b^2 N}}{s \cdot \left[1 + 2^{b^2} \left(\varrho(f,V) + \varepsilon_1 \right)\right]^2}$$

setzt, weil $\|e_k - e_{k-1}\|' = \|\bar{v}_k\|' = \|\tilde{\alpha}^k\|_n$ ist.

q.e.d.

OBdA sei angenommen, daß $k_5 = 1$ ist.

Nach dieser umfangreichen Vorarbeit ist es nicht mehr schwer, den nun folgenden Hauptsatz zu beweisen.

Satz 49: Es gelten

(i) V erfüllt die Haarsche Bedingung (H),

(ii) $\lim_k \eta_k = 0$,

(iii) $\eta_{k+1} \leq \eta_k \leq (d(f,v_k) - h_k)^2$ für $k \in \mathbb{N}$,

(iv) $\Delta''(x) \neq 0$ für $x \in A(f-v)$.

Dann konvergiert das zweite Remez-Verfahren quadratisch. Genauer gilt: Es gibt eine Zahl $C_{10} \in \mathbb{R}^+$, so daß für $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt

$$d(f,v_k) - h_k \leq C_{10} \cdot (d(f,v_{k-1}) - h_{k-1})^2 .$$

Beweis: Nach Satz 36 folgt aus (i) und (ii), daß das Verfahren konvergiert. Mit (iv) sind alle Voraussetzungen aus diesem Abschnitt erfüllt.

Sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Nach Satz 45 gibt es ein $j_k \in [0:n]$, so daß

$$d(f,v_k) - h_k \leq \frac{C_6}{2}\left[x_{j_k}^{k+1} - x_{j_k}^{k}\right]^2 + (2b + 1)\cdot\eta_k$$

ist. Nimmt man Satz 47 hinzu, so folgt

$$\begin{aligned} d(f,v_k) - h_k \leq{}& \frac{C_6}{2}(C_7)^2\|e_k - e_{k-1}\|^2 \\ &+ C_6C_7C_8\|e_k - e_{k-1}\|(\eta_k + \eta_{k-1}) \\ &+ \frac{C_6}{2}(C_8)^2(\eta_k + \eta_{k-1})^2 + (2b + 1)\cdot\eta_k . \end{aligned}$$

Mit Satz 48 und (iii) erhält man daraus

$$\begin{aligned} d(f,v_k) - h_k \leq{}& \frac{C_6}{2}(C_7C_9)^2(d(f,v_{k-1}) - h_{k-1})^2 \\ &+ 2C_6C_7C_8C_9(d(f,v_{k-1}) - h_{k-1})^3 \\ &+ C_6(C_8)^2(d(f,v_{k-1}) - h_{k-1})^4 \\ &+ (2b + 1)(d(f,v_{k-1}) - h_{k-1})^2 . \end{aligned}$$

Setzt man

$$C_{10} := \frac{C_6}{2}(C_7C_9)^2 + 2C_6C_7C_8C_9 + C_6(C_8)^2 + 2b + 1 ,$$

dann folgt

$$d(f,v_k) - h_k \leq C_{10}\cdot(d(f,v_{k-1}) - h_{k-1})^2 .$$

q.e.d.

Literatur

[1] Albinus, G.: Lineare Approximationstheorie in Klassen metrischer Vektorräume
Habilitationsschrift Dresden, DDR

[2] Carasso, C.: L'algorithme d'échange en optimisation convexe
Dissertation Universität Grenoble, Frankreich (1972)

[3] Laurent, P. J.: Théorèmes de caractérisation d'une meilleure approximation dans un espace normé et généralisation de l'algorithme de Rémès
Num. Math. 10, 190 - 208 (1967)

[4] Mairhuber, J. C.: On Haar's theorem concerning Chebyshev approximation-problems having unique solutions
Proc. Amer. Math. Soc. 7, 609 - 615 (1956)

[5] Pantelidis, G.: Approximationstheorie für metrische lineare Räume
Math. Ann. 184, 30 - 48 (1969)

[6] Remez, E.: Sur le calcul effectif des polynômes d'approximation de Tchebysheff
C. R. Acad. Sci. Paris, 199, 337 - 340 (1934)

[7] Stiefel, E.: Über diskrete und lineare Tschebyscheff-Approximationen
Num. Math. 1, 1 - 28 (1959)

[8] Töpfer, H.-J.: Über die Tschebyscheffsche Approximationsaufgabe bei nicht erfüllter Haarscher Bedingung
Hahn-Meitner-Institut für Kernforschung Berlin, Sektor Mathematik, HMI-B 40 (1965)

[9] Töpfer, H.-J.: Tschebyscheff-Approximation und Austauschverfahren bei nicht erfüllter Haarscher Bedingung
ISNM, Vol. 7, 71 - 89 (1967)

[10] Veidinger, L.: On the Numerical Determination of the Best Approximation in the Chebyshev Sense
Num. Math. 2, 99 - 105 (1960)

[11] Singer, I.: Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces
Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York (1970)

Mein Lebenslauf

Ich wurde am 16. Okt. 1948 in Kaltenkirchen, Kreis Segeberg, geboren. Mein Vater ist der Jurist Heinz Schwartz, meine Mutter ist Elske S. geb. Welding. 1954 zogen meine Eltern nach Kiel um. Nach vierjähriger Grundschulzeit in Kiel besuchte ich von 1959 bis 1966 das staatliche Gymnasium in Kiel Wellingdorf. Im Okt. 1966 bestand ich die Reifeprüfung.

Nach eineinhalbjähriger Dienstzeit beim Bundesgrenzschutz begann ich im SS 68 an der Universität Kiel das Studium in den Fächern Mathematik und Physik. Vom WS 68/69 an studierte ich in Göttingen. Im April 1972 bestand ich die Diplomhauptprüfung in Mathematik. Seit Mai 1972 bin ich als wiss. Assistent (anfangs als Verwalter einer Assistentenstelle) am Lehrstuhl für Numerische und Angewandte Mathematik von Herrn Prof. Dr. B. Brosowski tätig.

Ich bin seit 1971 verheiratet.